ZUR NUMERISCHEN BEHANDLUNG SCHWACHSINGULÄRER HOMOGENER INTEGRALGLEICHUNGEN IN EINER UND IN MEHREREN DIMENSIONEN

DIETER ESCHENBACH

Diss
München

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41534920_0034

Zur numerischen Behandlung schwachsingulärer, homogener Integralgleichungen in einer und in mehreren Dimensionen

Dissertation
zur Erlangung des akademischen Grades
eines Doktors der Naturwissenschaften
der Fakultät für Mathematik
der Ludwig-Maximilians-Universität
München

vorgelegt von
Dieter Eschenbach
aus Müllheim/Baden

---

eingereicht am 24.2.1984

1. Berichterstatter: Prof. Dr. G. Hämmerlin

2. Berichterstatter: Prof. Dr. W. Richert

Tag der mündlichen Prüfung: 18. Juni 1984

Herstellung: Hieronymus Buchreproduktions GmbH, München

INHALTSVERZEICHNIS

EINLEITUNG 1

1. DAS HOMOGENE PROBLEM, PRAKTISCHE AUFGABEN 8

2. NUMERISCHE VERFAHREN ZUR LÖSUNG DES EIGENWERTPROBLEMS 1o
2.1. Beispiele von Operatorklassen 1o
2.2. Kompaktheit der Integraloperatoren in $C(\overline{\Omega})$ 12
2.3. Verfahrensübersicht 15
2.3.1. Nyström-Methoden 16
2.3.2. Produkt-Quadratur 16
2.3.3. Verallgemeinerte Quadraturverfahren 18
2.3.4. Modifizierte Quadraturverfahren 19
2.3.5. Verfahrensvorschläge 22

3. STRUKTUR DER LÖSUNG 23
3.1. Parameterunabhängige Beispiele 23
3.2. Eindimensionale parameterabhängige Beispiele vom Faltungstyp 24
3.2.1. Distributionentheorie; Definitionen und Standardresultate 24
3.2.2. Die 1. Ableitung der Lösung 26
3.2.3. Höhere Ableitungen der Lösung; ein Struktursatz 27
3.3. Spezialfälle in mehreren Dimensionen 36
3.3.1. Produktsingularität über einem Intervall 36
3.3.2. Produktsingularität über einer Kugel 37
3.3.3. Produktsingularität über Dreiecken 4o
3.3.4. Normsingularität über einem Intervall 41
3.3.5. Normsingularität über einer Kugel 43
3.3.6. Zusammenfassung 43

4. KONVERGENZVERHALTEN, ALLGEMEINER FALL, MEHRFACHE EIGENWERTE 44
4.1. Eigenwertkonvergenz 44

4.2. Eigenfunktionskonvergenz 46

5. DISKRETISIERUNGSFRAGEN IN EINER UND MEHREREN DIMENSIONEN 47

6. FEHLERABSCHÄTZUNGEN IN EINER UND MEHREREN DIMENSIONEN FÜR DEN FALL NORMALER BZW. HERMITESCHER OPERATOREN 51

6.1. Fehlerabschätzungen für die Eigenwerte 51

6.2. Fehlerabschätzungen für die Eigenfunktionen 55

7. NUMERISCHE BEISPIELE 61

7.1. Konvergenzordnungstests 61

7.2. Eindimensionale Fälle und Konvergenzordnungen 63

7.3. Mehrdimensionale Fälle und Konvergenzordnungen 67

7.3.1. Parameterunabhängige Beispiele 67

7.3.2. Parameterabhängige Beispiele 68

7.4. Konkrete Fehlerabschätzungen für Eigenwerte und Eigenfunktionen 73

7.4.1. Stetige Integraloperatoren 73

7.4.2. Schwachsinguläre Integraloperatoren 78

7.5. Ein Transportproblem als physikalische Anwendung 85

LITERATUR 91

BEZEICHNUNGEN

$\Omega, \overline{\Omega}, \partial\Omega$	Gebiet im $\mathbb{R}^n$, Abschluß von Ω, Rand von Ω, s.S.8
$(L_p(\Omega), \|\cdot\|)$	Banachräume der im Lebesgueschen Sinne p-integrierbaren Funktionen mit Identifizierung von Äquivalenzklassen, s.S.8
L_1, L_2, L_p	Abkürzungen, falls Angabe von Definitionsbereich und Norm entbehrlich, s.S.3o
$C^m(\overline{\Omega}\times\overline{\Omega})$	Raum der auf $\overline{\Omega}\times\overline{\Omega}$ definierten reell- oder komplexwertigen m-mal stetig differenzierbaren Funktionen, s.S.8
$C(\overline{\Omega}\times\overline{\Omega}), C$	$=C^o(\overline{\Omega}\times\overline{\Omega})$; abkürzend: C
$C^\infty(\overline{\Omega})$	Raum der auf $\overline{\Omega}$ beliebig oft differenzierbaren Funktionen, s.S.29
$\|\cdot\|_{p,I}$	Norm mit Angabe des Bereichs
(u,v)	Skalarprodukt, s.S.55
$(W_p^m(\Omega), \|\cdot\|_p^m)$	Sobolev-Raum, s.S.25
$(N_1^\alpha(I), \|\cdot\|_{\alpha,1,I})$	Nikol'skii-Raum, s.S.25
$C^{(n,\alpha)}[o,1]$	Hölder-Raum, s.S.35
$\mathcal{D}(\mathbb{R}^n), \mathcal{D}(\Omega)$	Raum der Testfunktionen, s.S.25
$\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n), \mathcal{D}'(\Omega)$	Raum der Distributionen, s.S.25
$F(\Phi)$	Distribution, s.S.25
$\mathrm{Tr}\ \Phi$	Träger von Φ, s.S.24
$\|s\|\leq m, D^{(s)}$	Multiindex bei der partiellen Differentiation; gemischter partieller Differentialoperator bis zur maximalen Ableitungsordnung m, s.S.21,25

$T, K; T_n, H$	Operatornotation; Näherungsoperatoren, s.S.8,51,79
$\|\|T\|\|$	$:=\sup_{\|\|x\|\|=1} \|\|Tx\|\|$; Operatornorm bezüglich Banachraumnorm $\|\|\cdot\|\|$.
T_n^*	$:=(T-T_n)T_n$, s.S.56
T^n	n-fach iterierte Anwendung bei Operatoren, s.S.26
$\sigma(s,t)$	schwachsingulärer Kernanteil, s.S.1o
$k^*(s,t)$	glatter Kernanteil, s.S.1o
$k(s,t); k_n(s,t)$	Kern einer Integralgleichung; Kernapproximation, s.S.12,2o
R	Resolvente, s.S.56
$K*f$	Faltungsoperator, s.S.8o
(t_j, ω_j)	Stützstellen und Gewichte einer Quadraturformel, s.S.16
$\omega_j(s)$	parameterabhängiges Gewicht, s.S.44
$\|\Pi_{M_1 \times \ldots \times M_n}\|$	Maß für die Diskretisierung in n Dimensionen, s.S.17
$\tilde{Q}_{n_i}^{x_i}$	Quadraturformel bezüglich der Variablen x_i mit Diskretisierungsindex n_i, s.S.48
$\tilde{Q}_{n_1 \times n_2}^{x_1 \times x_2}$	entsprechender Kubaturfehler, s.S.49
$\Delta_\varepsilon \Phi$	Differenzenoperator, s.S.26
P_n	Interpolationsoperator, s.S.18
$R(T)$	verallgemeinerter Eigenraum, s.S.45
$S(T)$	Spektrum, s.S.16
x, f, y	Eigenfunktionen, s.S.2o
$x_n, f_n, \hat{x}_n, x_h, y_n, \hat{f}_n, f^n$	verschiedene Näherungslösungen; berechnete Eigenfunktionen, s.S.2o,21,51,58,73,79

$\lambda, \lambda_n, \mu, \lambda_h$	Eigenwert; Näherungen, s.S.51,79
$Ei(-x)$	Exponentialintegral, s.S.86
C	Eulersche Konstante = o.5772...
$[\alpha]$	Entier-Funktion = max $\{ z \in \mathbb{Z} \mid z \leq \alpha \}$, s.S.25

EINLEITUNG

Wir beschäftigen uns mit der numerischen Lösung von Operatorgleichungen. Speziell richtet sich unser Augenmerk auf die Behandlung linearer, schwachsingulärer, homogener Integralgleichungen in einer und in mehreren Dimensionen mit kompakten Operatoren T:

$$Tf = \lambda f \ .$$

Das numerische Interesse konzentriert sich auf verschiedene Approximationsschemata, etwa Quadratur-, Ersatzkern-, Galerkin- und Kollokationsverfahren. Für den Spezialfall eindimensionaler, stetiger Integralgleichungen steht eine weit entwickelte Lösungs- und Fehlerabschätzungstheorie bereit. So gibt NOBLE einen Überblick über den Stand der Untersuchungen von 197o mit einer Zusammenfassung der einschlägigen Literatur [33], über Anwendungen [34] und über neuere Behandlungsmöglichkeiten [35], [36]. Heute gilt BAKER [7] als Standardwerk. Er behandelt alle Problemtypen und gängigen Verfahren. Umfangreiches Beispielmaterial rundet diese Untersuchungen ab. Bei Quadraturverfahren ist das Konzept der kollektiv-kompakten Operatoren grundlegend; mit diesem Konzept eng verbunden sind die Arbeiten von ANSELONE [1] und ATKINSON [3], [4], [5].

Die genannten Verfahren gehen von unterschiedlichen Ansätzen aus, lassen sich jedoch in gewissen Fällen ineinander überführen. So stellen sich einige Ersatzkernverfahren als spezielle Quadraturverfahren heraus (HÄMMERLIN [28]), und die sogenannte Produktintegration oder verallgemeinerte Integration, ein Quadraturverfahren, läßt sich als Kollokations-

methode deuten (BAKER [7]). In neueren Arbeiten behandeln GRAHAM [26], [24], CHANDLER [16], SLOAN e.a. [45], [46], [47], [48], [49] inhomogene Integralgleichungen in einer und in mehreren Dimensionen mit Kollokations- bzw. Galerkinverfahren und deren iterativen Varianten. Zur Lösung dieser Aufgabe stellen SCHNEIDER [42], BECHLARS [11], VOLK [55] und ANSELONE [2] verschiedene Quadraturverfahren vor.

Zur numerischen Lösung der vorgelegten Aufgabe ist die Konstruktion effektiver Verfahren notwendig. Zur Beurteilung jedes mathematischen Verfahrens werden Konvergenzaussagen und Fehlerabschätzungen benötigt. Bei homogenen Integralgleichungen müssen diese Untersuchungen sowohl die Eigenwerte als auch die Eigenfunktionen erfassen. Erst 1978 zeigt SPENCE [5o] die Konvergenz der Nyström-Methode (Quadraturverfahren, Quadraturformelmethode) bei der Integralgleichungseigenwertaufgabe mit nicht notwendig symmetrischen Kernfunktionen. HÄMMERLIN [28] behandelt das stetige Eigenwertproblem mit Ersatzkernverfahren und gibt Fehlerabschätzungen für die Eigenwerte und Eigenfunktionen an. BRAKHAGE [13] und WIELANDT [57] erhalten bei der Behandlung derselben Aufgabe durch Quadraturverfahren Fehlerabschätzungen für die Eigenwerte. Mit der numerischen Behandlung des homogenen Problems beschäftigen sich schließlich SPENCE [52], BAKER [9] und SCHÄFER [4o], [41], in einem allgemeineren Rahmen auch CHATELIN [17] und OSBORN [37]. Der letzten Arbeit entnimmt man die Konvergenz von Nyström-Verfahren in mehreren Dimensionen. Nur sehr wenige Hinweise gibt die Literatur auf die konkrete Behandlung mehrdimensionaler homogener Integralgleichungen, deren Kerne zudem schwachsingulär sein können.

In dieser Arbeit werden nur Nyström-Methoden untersucht. Diese Verfahren bieten eine große Reihe von Varianten. Man kann sich der gesamten Quadraturtheorie mit ihren zahlreichen

Modifikationen und Optimierunsgmöglichkeiten bedienen. Es zeigt sich, daß Quadraturverfahren für Fehlerabschätzungen geeignet sind. Für schwachsinguläre Eigenwertprobleme steht eine Herleitung solcher Fehlerschranken aus. Dies ist Gegenstand der Untersuchungen in dieser Arbeit. Bemerkenswert ist auch das Ergebnis, daß sich Konvergenzbetrachtungen auf Konvergenzaussagen spezieller Quadraturfehler reduzieren. Bei der numerischen Integration hängt die Konvergenzgeschwindigkeit wesentlich von der Glattheit des Integranden ab. Für inhomogene Probleme zeigen SCHNEIDER [42], [43], [44] und BECHLARS [11], daß man mit einem nicht-glatten Lösungsverlauf rechnen muß. Da die Lösung Bestandteil des Integranden ist, kann man mit Auswirkungen auf das Konvergenzverhalten der Nyström-Methode rechnen. Aus der Literatur ergab sich bisher kein Hinweis auf eine Strukturanalyse der Lösung der Eigenwertaufgabe. Bei unserer Untersuchung dieser Frage zeichnen sich ähnliche Schwierigkeiten ab. Fehlende Differenzierbarkeitseigenschaften der Lösung lassen sich aber häufig durch eine spezielle Stützstellenwahl beheben. Bei allen behandelten Verfahren treten in mehreren Dimensionen zusätzliche Schwierigkeiten auf, da alle Resultate nicht nur von der Struktur des erzeugenden Kerns sondern zudem von der Geometrie des Integrationsbereichs abhängen. Mit zunehmender Dimension des Problems stößt man recht schnell an die Kapazitätsgrenzen auch von Großrechenanlagen.

Über dieses rein mathematische Interesse hinaus bestehen aber auch physikalische Motivationen. Eindimensionale, inhomogene Probleme mit algebraischer Singularität treten beispielsweise bei der Beschreibung chemisch-physikalischer Vorgänge, bei der Behandlung des Dirichletschen Außenraumproblems für die zweidimensionale Helmholtzsche Schwingungsgleichung sowie anderer Dirichlet-Probleme auf (siehe etwa SCHNEIDER [42]). Das inhomogene mehrdimensionale Problem mit logarithmischer

Singularität tritt in der Elektrodynamik auf (siehe etwa GRAHAM [26]). Für den mit dem homogenen Problem eng zusammenhängenden inhomogenen Fall existieren zahlreiche Anwendungen.
Schließlich beschreibt BENNETT [12] Transportprobleme durch homogene, schwachsinguläre Integralgleichungen in zwei Geometrien.

Nach dieser Darstellung der Schwerpunkte gebe ich im folgenden eine Zusammenfassung der Kapitel mit den erzielten Resultaten.

Nach der Formulierung der Eigenwertaufgabe im 1. Kapitel werden im 2. Kapitel Testbeispiele vorgestellt, an denen die theoretischen Resultate bestätigt werden sollen. Für die Gültigkeit dieser Ergebnisse ist die Kompaktheit der Operatoren zu zeigen. In den eindimensionalen Fällen erweist es sich als zweckmäßig, für die Nyström-Verfahren Quadraturformeln zu konstruieren, die den singulären Anteil des Kerns in ihren Gewichten mitberücksichtigen. In mehreren Dimensionen ist dies mit großem Aufwand verbunden und nur in Spezialfällen möglich. Falls es der Integrationsbereich zuläßt, sind iterierte eindimensionale Varianten die einfachsten und effektivsten Verallgemeinerungen auf den mehrdimensionalen Fall. Ein modifiziertes mehrdimensionales Quadraturverfahren besteht im Prinzip darin, zunächst die Kernsingularität zu eliminieren, so daß gewöhnliche mehrdimensionale Integrationsformeln anschließend zum Ziel führen. Dieses Verfahren ist auch bei Vorliegen von Kerndiagonalsingularitäten anwendbar. Kennt man das Ableitungsverhalten der Lösung, so kann man diese Methode unter Umständen effektiver gestalten. Damit ist die Überleitung zu einer Strukturuntersuchung motiviert.

In Kapitel 3 werden die Testbeispiele auf ihr Lösungsverhalten untersucht: Parameterabhängige Substitution und Differentiation der Operatoren mit diagonalsingulären Kernen ergeben direkte Auswirkungen der Kernstruktur auf die Ableitungen der Lösung. Dieser Sachverhalt wird mit Hilfe funktionalanalytischer Methoden in einem Struktursatz präzisiert und bewiesen. In mehreren Dimensionen spielt es eine Rolle, ob der Integrationsbereich glatt berandet ist oder "Ecken" besitzt. Schlechtestenfalls muß man in den partiellen Ableitungen der Lösung mit Singularitäten auf dem gesamten Rand rechnen.

In Kapitel 4 wird die Konvergenz aller Verfahren untersucht. Die Ergebnisse des vorangehenden Abschnitts wirken sich direkt auf das Konvergenzverhalten des numerischen Verfahrens aus. Sehr allgemeine Konvergenzsätze kann man aus einer Arbeit von OSBORN [37] direkt ableiten; sowohl komplexe als auch mehrfache Eigenwerte finden dort Berücksichtigung. Ein spezieller Quadraturfehler stellt sich als wesentliche Einflußgröße für die Konvergenzordnungen heraus. Da die gesuchte Lösung Bestandteil des Integranden ist, würden sich deren fehlende Differenzierbarkeitseigenschaften in einem Abfall der Konvergenzordnungen bemerkbar machen.

Eine gewisse Freiheit besteht noch in der Wahl der Stützstellen des Verfahrens. Ursprünglich greift RICE [38] Diskretisierungsfragen bei Integrationsverfahren auf. SCHNEIDER [44] und BECHLARS [11] verfeinern diese Knotenstreuung und wenden sie auf inhomogene Probleme an. Diese Technik soll in Kapitel 5 auf das eindimensionale Eigenwertproblem übertragen werden. Die Verallgemeinerung auf mehrere Dimensionen ist in gewissen Fällen möglich.

Schließlich gelingt es in Kapitel 6 prinzipiell, für die

Nyström-Methode bei normalen bzw. Hermiteschen Integraloperatoren berechenbare Fehlerschranken für die Eigenwerte und Eigenfunktionen anzugeben. Dabei stellen die Fehlerabschätzungen für die Eigenwerte eine Verallgemeinerung der Brakhageschen Schranken auf den schwachsingulären und mehrdimensionalen Fall dar. Fehlerabschätzungen für die Eigenfunktionen, wie sie in dieser Arbeit hergeleitet werden, finden sich in der Literatur auch für den Spezialfall stetiger, eindimensionaler Integralgleichungen nicht. Sie hängen im wesentlichen von den Eigenwertschranken ab. Einflußgrößen dieser Abschätzungen sind spezielle (mehrdimensionale) Quadraturfehler. Für die praktische Berechnung stehen Standardwerke wie STROUD [53] und ENGELS [22] zur Verfügung.

Alle behandelten Verfahren lassen sich den genannten Konvergenzuntersuchungen unterziehen. Eine repräsentative Auswahl an numerischen Beispielen mit Konvergenzordnungstests und konkreten Fehlerabschätzungen sowie eine physikalische Anwendung bestätigen im letzten Kapitel die theoretischen Resultate.

Die numerischen Programme wurden an den Großrechenanlagen CDC Cyber 175 des Leibniz-Rechenzentrums der Bayerischen Akademie der Wissenschaften in München und Burroughs B 7800 des Rechenzentrums der Hochschule der Bundeswehr München ausgeführt.

Herrn Prof. Dr. G. Hämmerlin darf ich an dieser Stelle meinen herzlichen Dank aussprechen für die Anregung und Betreuung der vorliegenden Dissertation, sowie die stete Unterstützung während des Fortgangs der Arbeit.

Gleichfalls bin ich Herrn Prof. Dr. K.-J. Schwenzfeger für das Interesse und das wohlwollende, fruchtbare Arbeitsklima sehr verpflichtet.

Den Mitarbeitern des Instituts für Angewandte Mathematik und Rechneranwendungen der Hochschule der Bundeswehr München und des Mathematischen Instituts der Universität München danke ich für zahlreiche anregende und kritische Anmerkungen und Diskussionen.

Besonderer Dank geht schließlich an meine Kollegen S. Pöhlmann, M. Zeschmann, J. Weckl und S. Heigl für ihre Bereitschaft zu fortwährendem Gedankenaustausch bei der Problemaufbereitung und für kritische Bemerkungen zur Darstellung im Zusammenhang mit dieser Arbeit.

1. DAS HOMOGENE PROBLEM, PRAKTISCHE AUFGABEN

Operatoren der Form

$$\int_{\Omega} \sigma(s,t)\cdot k^{*}(s,t)\cdot f(t)\,dt = :Tf(s),\quad s \in \Omega$$

mit Lebesgue-integrierbarem Kernanteil $\sigma(s,\cdot)\in L_1(\Omega)$ und in beiden Variablen mindestens stetigem $k^{*}\in C^{m}(\overline{\Omega}\times\overline{\Omega})$, $m\geq o$, heißen schwachsinguläre Integraloperatoren. Dabei bezeichnet Ω ein beschränktes, nicht-leeres Gebiet im $\mathbb{R}^n$, $\overline{\Omega}$ bezeichnet den Abschluß von Ω und ist als zusammenhängend vorausgesetzt. Die auftretenden Funktionen sind reell- oder komplexwertig.

Das Problem

$$Tf(s) = \lambda f(s) + g(s),\quad s \in \Omega$$

mit stetigem $g\in C(\overline{\Omega})$ (oder gleichmäßig stetigem $g\in C(\Omega)$) und reellem oder komplexem $\lambda\in\mathbb{C}$ heißt das inhomogene Integralgleichungsproblem 2. Art und

$$Tf(s) = \lambda f(s),\quad s \in \Omega$$

das zugehörige homogene Problem, bei dem $f\neq o$ und λ gesuchte Größen sind. Die (gleichmäßige) Stetigkeit der Lösung $f\in C(\overline{\Omega})$, genauer müßte man von stetiger Fortsetzbarkeit der Lösung auf den Rand sprechen, zeigt man mit einem Standardargument (siehe etwa BAKER [7]).
Will man stetige Fortsetzbarkeit auf den Rand $\partial\Omega$ zum Ausdruck bringen, soll also s auch auf dem Rand von Ω liegen können, betrachtet man

$$Tf(s) := \int_{\Omega} \sigma(s,t)\ k^*(s,t)\ x(t)\ dt,\quad s \in \bar{\Omega}\ .$$

Eindimensionale inhomogene Probleme mit schwacher Kerndiagonalsingularität treten beispielsweise bei der Beschreibung chemisch-physikalischer Vorgänge, bei der Behandlung des Dirichletschen Außenraumproblems für die zweidimensionale Helmholtzsche Schwingungsgleichung sowie anderer Dirichletprobleme auf (s. etwa SCHNEIDER [42], DELVES/WALSH [2o], AUER/GARDNER [6], KUSSMAUL/WERNER [31], ATKINSON [5]).
Das inhomogene, mehrdimensionale Problem mit logarithmischer Singularität

$$f(s_1,s_2) = C_o + \lambda \int_o^d \int_o^1 \ln\sqrt{(s_1-t_1)^2+(s_2-t_2)^2}\ f(t_1,t_2)dt_1dt_2$$

mit (t_1,t_2), $(s_1,s_2) \in [o,1]\times[o,d]$ und skalaren Größen C_o, λ, $d > o$ tritt in einem Problem der Elektrodynamik auf, das GRAHAM [26] beschreibt.
JASWON/SYMM [3o] und BAKER [8] weisen auf die Bedeutung homogener Probleme bei der Behandlung von Integralgleichungen 1. Art hin.
Für das mit dem homogenen Fall eng zusammenhängende inhomogene Problem gibt es zahlreiche Anwendungen.
Bei der Behandlung von Wellenproblemen wird man schließlich direkt auf das eindimensionale, schwachsinguläre Eigenwertproblem geführt. (DAVIS [18])
Die schönste Anwendung für den ein- und mehrdimensionalen Fall findet man in BENNETT [12]. Hier wird die kritische Zahl c_o von Sekundärneutronen pro Stoß für die mono-energetische Transportgleichung mit isotroper Streuung in zwei Geometrien behandelt. c_o hängt in direkter Weise mit den Eigenwerten eines homogenen, schwachsingulären Problems zusammen, das die Transportaufgabe beschreibt. Im Numerikteil wird dieses Beispiel nochmals aufgegriffen.

2. NUMERISCHE VERFAHREN ZUR LÖSUNG DES EIGENWERTPROBLEMS

Ziel dieses Kapitels ist es, für eine Reihe von Operatorklassen Vorschläge für speziell zugeschnittene numerische Verfahren zu machen und Kompaktheit dieser Operatoren zu zeigen.

2.1. Beispiele von Operatorklassen

Nachfolgend werden die Operatoren

$$Tf(s) = \int_{\Omega} \sigma(s,t)k^*(s,t)f(t)dt, \quad \Omega \subset \mathbb{R}^n$$

durch Angabe der Singularität σ charakterisiert. k^* soll eine beliebige, mindestens stetige Funktion sein. In konkreten Fällen müssen in mehreren Dimensionen noch die Gebiete Ω angegeben werden, etwa n-dimensionale, offene Kugeln oder Würfel.

2.1.1. $\sigma(s,t) = \sigma(t) = \sqrt{t_1^2+t_2^2+\ldots+t_n^2}^{\alpha-n}$, $o<\alpha<n$ †)

2.1.2. $\sigma(s,t) = \sigma(t) = \ln \sqrt{t_1^2+t_2^2+\ldots+t_n^2}$

2.1.3. $\sigma(s,t) = \sigma(\|s-t\|_2) = \sqrt{(s_1-t_1)^2+\ldots+(s_n-t_n)^2}^{\alpha-n}$, $o<\alpha<n$.

2.1.4. $\sigma(s,t) = \sigma(\|s-t\|_2) = \ln \sqrt{(s_1-t_1)^2+\ldots+(s_n-t_n)^2}$

2.1.5. $\sigma(s,t) = |s_1-t_1|^{\alpha_1-1}\cdot\ldots\cdot|s_n-t_n|^{\alpha_n-1}$, $o<\alpha_i<1$, $i=1(1)n$.

---

†) Stark singuläre Integralgleichungen ($\alpha=o$) werden in dieser Arbeit nicht behandelt; siehe hierzu etwa MICHLIN/ PRÖSSDORF [32].

2.1.6. $\sigma(s,t) = \ln |s_1-t_1| \cdot \ldots \cdot \ln |s_n-t_n|$

2.1.7. $\sigma(s,t) = |s_1-t_1|^{\alpha_1-1} (t_1-a_1)^{p_1} (b_1-t_1)^{q_1} \cdot \ldots \cdot$

$\cdot |s_n-t_n|^{\alpha_n-1} (t_n-a_n)^{p_n} (b_n-t_n)^{q_n}$,

$\Omega = \{ t \in \mathbb{R}^n \mid a_i < t_i < b_i \}$, $o<\alpha_i<1$, $p_i, q_i \geq o$,

$i=1(1)n$, $t=(t_1,\ldots,t_n)$

2.1.8. $\sigma(s,t) = (1-t_1)^{\alpha_1} |s_1-t_1|^{\alpha_1-1} \cdot \ldots \cdot (1-t_n)^{\alpha_n} |s_n-t_n|^{\alpha_n-1}$,

$o<\alpha_i<1$, $i=1(1)n$; $\Omega = \{ t \in \mathbb{R}^n \mid o<t_i<1, i=1(1)n \} =: I^n$

2.1.9. $\sigma(s,t) = \sqrt{(s_1-t_1)^2+\ldots+(s_n-t_n)^2}^{\alpha-n}$ ·

$\cdot \exp(-1/[s_1^2(1-s_1)^2+\ldots+s_n^2(1-s_n)^2])$,

$o<\alpha<n$, $\Omega = I^n$.

2.2. Kompaktheit der Integraloperatoren in $C(\overline{\Omega})$

Für die Gültigkeit der numerischen Konvergenzaussagen, der Fredholmschen Alternative und spektraltheoretischer Aussagen über Eigenwerte symmetrischer Operatoren ist die Kompaktheit der Integraloperatoren nachzuweisen. Die angegebenen Operatoren erfüllen diese Eigenschaft.
Dies sieht man unter Zuhilfenahme eines Kompaktheitskriteriums, das man etwa EDWARDS [21, S.665ff.] entnimmt. Der Kern des Integraloperators muß dabei zwei Bedingungen erfüllen:

1.) $t \to k(s,t)$ integrierbar, für alle $s \in \overline{\Omega}$

2.) $\lim_{s \to s_o} \| k(s,t)-k(s_o,t) \|_1 = o$, für alle $s, s_o \in \overline{\Omega}$.

Quadratintegrierbare Kerne führen bekanntlich auf kompakte Integraloperatoren. Für beliebiges α kann man nicht mehr auf diese Eigenschaft des Kerns zurückgreifen; deshalb kommen das oben angegebene Kriterium oder auch die etwas besser handhabbaren Kriterien aus GRAHAM [23] zum Nachweis in Betracht. Gerade für mehrdimensionale Operatoren ist es keineswegs trivial, Kompaktheit festzustellen; siehe auch GRAHAM/SLOAN [25].

Bedingung 1.) ist in allen Fällen offensichtlich erfüllt. In den parameterunabhängigen Fällen 2.1.1. und 2.1.2. ist zum Nachweis der Bedingung 2.) nichts zu zeigen. In den Fällen 2.1.3., 2.1.4. und 2.1.9. weist man Bedingung 2.) durch gleichmäßige L_1-Approximation nach. Exemplarisch sei dies über einem Quadrat für den Fall 2.1.3. gezeigt.

$$\| k(s+\delta,\cdot)-k(s,\cdot) \|_1 =$$

$$= \int_a^b \int_a^b \left| \sqrt{(s_1+\delta_1-t_1)^2+(s_2+\delta_2-t_2)^2}^{\alpha-2} - \sqrt{(s_1-t_1)^2+(s_2-t_2)^2}^{\alpha-2} \right| dt$$

$$= \int_{s_2-b}^{s_2-a} \int_{s_1-b}^{s_1-a} \left| \sqrt{(t_1+\delta_1)^2+(t_2+\delta_2)^2}^{\alpha-2} - \sqrt{t_1^2+t_2^2}^{\alpha-2} \right| dt \quad . \quad (dt := dt_1 dt_2)$$

Jedes integrierbare $g \in L_1(\Omega)$ läßt sich in folgendem Sinn durch gleichmäßig stetige Funktionen $g_\varepsilon \in C(\Omega)$ approximieren:

$$\forall_{\varepsilon>0, g_\varepsilon \in C([a-b,b-a]\times[a-b,b-a])} \exists : \int_{a-b}^{b-a} \int_{a-b}^{b-a} |g(t_1,t_2)-g_\varepsilon(t_1,t_2)| dt < \varepsilon$$

Damit kann man durch Einschieben dieser Approximation weiter abschätzen:

$$\| k(s+\delta,\cdot)-k(s,\cdot) \|_1 \leq 2\varepsilon + \int_{s_2-b}^{s_2-a} \int_{s_1-b}^{s_1-a} |g_\varepsilon(t_1+\delta_1,t_2+\delta_2)-g_\varepsilon(t)| dt$$

$$\leq 2\varepsilon + (b-a)^2 \cdot \sup_{\substack{t_1 \in [s_1-b,s_1-a] \\ t_2 \in [s_2-b,s_2-a]}} |g_\varepsilon(t_1+\delta_1,t_2+\delta_2)-g_\varepsilon(t_1,t_2)| \underset{\delta_1,\delta_2 \to 0}{\to} 0,$$

da g_ε gleichmäßig stetig.

GRAHAM [23] zeigt ein allgemeines Kriterium:

Sei $k(s,t) = \Psi(t-g(s))$, $s,t \in \Omega$, $g: \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^n$ stetig, $\Psi \in L_1(\Omega^*)$, $\Omega^* := \{ t-g(s): s,t \in \Omega \}$. Dann ist der von k erzeugte Integraloperator $T: C(\overline{\Omega}) \to C(\overline{\Omega})$ kompakt. Dies beweist Kompaktheit in den Fällen 2.1.3., 2.1.4. und 2.1.9., wenn man für den allgemeinen Fall $k(s,t)=\sigma(s,t)k^*(s,t)$ mit stetigem k^* Theorem 2.2. aus GRAHAM [23] heranzieht.

Die Fälle 2.1.5.-2.1.8. spielt man auf den eindimensionalen Fall zurück. Im Einzelfall müssen die Untersuchungen für verschiedene Grundgebiete gesondert durchgeführt werden. Exemplarisch soll für zwei Raumdimensionen und ein Quadrat Kompaktheit des erzeugten $T: C(\overline{\Omega}) \to C(\overline{\Omega})$ hergeleitet werden. Wo Kerne in Produktgestalt auftreten, muß oben zitiertes Theorem sinngemäß angewendet werden.

$$\| k(s+\delta,\cdot)-k(s,\cdot) \|_1 =$$

$$\int_a^b\int_a^b | \, |s_1+\delta_1-t_1|^{-\alpha}\cdot|s_2+\delta_2-t_2|^{-\beta}-|s_1-t_1|^{-\alpha}\cdot|s_2-t_2|^{-\beta}|dt_1dt_2 =$$

$$\int_a^b\int_a^b | \, |s_1+\delta_1-t_1|^{-\alpha}\cdot|s_2+\delta_2-t_2|^{-\beta}+[|s_1-t_1|^{-\alpha}\cdot|s_2+\delta_2-t_2|^{-\beta} -$$

$$-|s_1-t_1|^{-\alpha}\cdot|s_2+\delta_2-t_2|^{-\beta}]-|s_1-t_1|^{-\alpha}\cdot|s_2-t_2|^{-\beta}|dt_1dt_2 \leq$$

$$\int_a^b\Big(\int_a^b | \, |s_1+\delta_1-t_1|^{-\alpha}-|s_1-t_1|^{-\alpha}|dt_1\Big)\cdot|s_2+\delta_2-t_2|^{-\beta}dt_2 +$$

-Der Klammerausdruck strebt gegen o, falls $\delta_1 \to o$, weil diese Bedingung als Spezialfall von 2.1.3. für n=1 erfüllt ist-

$$+\int_a^b\int_a^b|s_1-t_1|^{-\alpha}\cdot||s_2+\delta_2+t_2|^{-\beta}-|s_2-t_2|^{-\beta}|dt_1dt_2 \underset{\delta_1,\delta_2\to o}{\to} o \, .$$

- analoge Überlegungen gelten für den Betragsausdruck für $\delta_2 \to o$ -

Integriert man über andere n-dimensionale Bereiche, so führt man die Berechnung des Mehrfachintegrals auf die sukzessive Berechnung n einfacher Integrale zurück, deren Grenzen dann integrationsvariablenabhängig sein können.
Die Frage, wann ein Operator $T: L_q(\Omega) \to C(\overline{\Omega})$ nicht kompakt ist, wird in der Dissertation von GRAHAM [23] und in GRAHAM/SLOAN [25] angesprochen.

2.3. Verfahrensübersicht

Es gibt zahlreiche Möglichkeiten, homogene und inhomogene Integralgleichungsprobleme numerisch zu behandeln. Eine geläufige Methode besteht darin, das auftretende Integral zunächst durch eine numerische Quadraturformel zu ersetzen, um dann Kollokation durchzuführen; diese Vorgehensweise nennt man Nyström-Verfahren oder Quadraturformelmethode. Sie soll weiter unten aufgegriffen werden und ausführlich in verschiedenen Varianten behandelt werden. Zweckmäßig erscheinen diese Verfahren, weil die Konvergenztheorie relativ einfach handhabbar ist. Darüber hinaus befassen sich SCHNEIDER [42] mit Extrapolationsfragen bei speziellen schwachsingulären Integralgleichungsproblemen, GRAHAM [23] und CHANDLER [15] mit Projektionsmethoden für solche Aufgaben. In neueren Arbeiten greifen SLOAN e.a. [45], [46], [47], [48], [49] diese Verfahren auf und stellen eine iterative Variante vor, bei der im inhomogenen Fall gewisse Superkonvergenzphänomene geklärt werden. Bei der Wahl der Ansatzfunktionen ist man ziemlich ungebunden; Splines erweisen sich als vorteilhaft und wurden in der Literatur eingehend untersucht. Zudem lassen sich verallgemeinerte Quadraturmethoden (Produktintegration) [†)] als spezielle (iterierte) Projektionsmethoden deuten. Schließlich kommen für die numerische Behandlung die auf HÄMMERLIN [28] zurückgehenden Ersatzkernverfahren in Betracht, bei denen der Kern des Integraloperators durch einen "degenerierten" Kern approximiert wird. Dieses "Ersatzproblem" ist dann exakt lösbar. Auch Ersatzkernverfahren entsprechen in manchen Fällen einem Quadraturverfahren.

[†)] Der geläufige Begriff der Produktintegration soll in dieser Arbeit für iterierte eindimensionale Quadratur reserviert bleiben.

Wegen der weitentwickelten Quadratur-(fehler)-Theorie scheinen aber in Bezug auf Fehlerabschätzungen Nyström-Methoden vielversprechend. Jedoch sind solche Abschätzungen für den nicht-stetigen Fall aus der Literatur nicht bekannt. Im folgenden werden solche Verfahren näher untersucht.

2.3.1. Nyström-Methoden[†)]

Zur Lösung der Eigenwertaufgabe $Tf(s) = \lambda f(s)$ ersetzt man das Integral durch die Anwendung einer mehrdimensionalen Quadraturformel und diskretisiert den Parameter s anschließend, so daß folgendes Näherungsproblem entsteht:

$$\sum_{j=1}^{n} \omega_j k^*(s_i,t_j) f(t_j) = \lambda f(s_i),\ s_i,t_j \in \bar{\Omega},\ i,j = 1(1)n.$$

Dabei bezeichnen ω_j die Gewichte der eventuell zusammengesetzten Formel mit n Punkten, die noch von s_i abhängen können.
Die Eigenfunktion ergibt sich als sogenannte Nyström-Interpolierte:

$$f(s) = \frac{1}{\lambda} \sum_{j=1}^{n} \omega_j k^*(s,t_j) f(t_j),\ s \in \bar{\Omega}\ .$$

Die Methode ist für stetige, eindimensionale Fälle wohlbekannt. Will man sie auf mehrere Dimensionen und schwachsinguläre Probleme erweitern, so kann man verschiedene Wege beschreiten.

2.3.2. Produkt-Quadratur

STROUD [53] entnimmt man einen Satz, der angibt, wie man aus Quadraturformeln durch Iteration Produktquadraturformeln in mehreren Dimensionen konstruieren kann:

---

†) Ursprünglich sprach man von Nyström-Methoden nur bei der Behandlung mittels Gauß-Verfahren. Quadraturverfahren, Quadraturformelmethoden und Nyström-Methoden sollen in dieser Arbeit synonym verwendet werden.

SATZ (STROUD):

Seien R_n, R_p, R_q Integrationsbereiche im $\mathbb{R}^n$ bzw. $\mathbb{R}^p$ bzw. $\mathbb{R}^q$ und gelte $n = p + q$. Seien $R_n = R_p \times R_q$, $\sigma(x_1,\ldots,x_n) = \sigma_p(x_1,\ldots,x_p)\cdot\sigma_q(x_{p+1},\ldots,x_n)$. Hat man zwei Quadraturformeln für R_p bzw. R_q:

$$I_p := \int_{R_p}\ldots\int \sigma_p(x_1,\ldots,x_p) f(x_1,\ldots,x_p)\,dx_1\ldots dx_p \approx \sum_{i=1}^{N_p} \omega_{p,i} f(\lambda_{i,1},\ldots,\lambda_{i,p}) := C_{N_p}$$

vom Grad d_p und $|I_p - C_{N_p}| = O(|\Pi_{N_p}|^{\tilde{p}})$ †) und

$$I_q := \int_{R_q}\ldots\int \sigma_q(x_{p+1},\ldots,x_n) f(x_{p+1},\ldots,x_n)\,dx_{p+1}\ldots dx_n \approx \sum_{j=1}^{N_q} \omega_{q,j} f(\mu_{j,p+1},\ldots,\mu_{j,n}) := C_{N_q}$$

vom Grad d_q und $|I_q - C_{N_q}| = O(|\Pi_{N_q}|^{\tilde{q}})$ †),

dann gilt:

$$I_{p\times q} := \int_{R_n}\ldots\int \sigma(x_1,\ldots,x_n) f(x_1,\ldots,x_n)\,dx_1\ldots dx_n \approx \sum_{i=1}^{N_p}\sum_{j=1}^{N_q} \omega_{p,i}\omega_{q,j} f(\lambda_{i,1},\ldots,\lambda_{i,p};\mu_{j,p+1},\ldots,\mu_{j,n}) := C_{N_p}\times C_{N_q}$$

ist vom Grad $\min(d_p, d_q)$ und

$$|I_{p\times q} - C_{N_p\times N_q}| = O(|\Pi_{N_p\times N_q}|^{\min(\tilde{p},\tilde{q})}) \quad \text{†)}.$$

---

†) Dabei ist $|\Pi_M|$ ein Maß für die Abstände der Stützpunkte mit $|\Pi_M| \to 0$, für $M \to \infty$.

2.3.3. Verallgemeinerte Quadraturverfahren †)

Unter einem verallgemeinerten Quadraturverfahren versteht man eine Formel bezüglich einer Gewichtsfunktion:

$$\int_{\Omega} W(x)f(x)dx = \sum_{j=1}^{n} \omega_j f(x_j),\ x_j \in \overline{\Omega}.$$

Exemplarisch sei die Aufgabe

$$\int_a^b |s-t|^{-\alpha} k^*(s,t)f(t)dt = \lambda f(s)$$

vorgelegt.
In einem etwas allgemeineren Rahmen gesehen, löst man folgendes Problem:

$$\int_a^b |s-t|^{-\alpha} P_n[k^*(s,\cdot)f(\cdot)](t)dt = \lambda f(s)\ .$$

P_n kann dabei z.B. ein Interpolationsoperator sein. Wählt man beispielsweise lineare Interpolation, und will man daraus die Gewichte der verallgemeinerten zusammengesetzten Trapezregel berechnen, so hilft die Identität:

$$\int_a^b |s-t|^{-\alpha} P_n[k^*(s,\cdot)f(\cdot)](t)dt =$$

$$k^*(s,t_o)f(t_o)\ \{[g_2(s,t_1)-g_2(s,t_o)]/(t_1-t_o)-g_1(s,t_o)\}+$$

$$k^*(s,t_n)f(t_n)\ \{g_1(s,t_n)-[g_2(s,t_n)-g_2(s,t_{n-1})]/(t_n-t_{n-1})\}$$

$$+\sum_{i=1}^{n-1} k^*(s,t_i)f(t_i)\cdot\{[g_2(s,t_{i+1})-g_2(s,t_i)]/(t_{i+1}-t_i)$$

$$-[g_2(s,t_i)-g_2(s,t_{i-1})]/(t_i-t_{i-1})\},$$

---

†) In der Literatur ist dafür der Begriff Produktintegration gebräuchlich, soll aber hier zur Vermeidung von Verwechslungen umgangen werden.

die man durch partielle Integration gewinnt.
Dabei bezeichnen g_1 und g_2 Stammfunktionen:

$$g_1'(s,\cdot) = |s-t|^{-\alpha} \quad , \quad g_2'(s,\cdot) = g_1(s,\cdot).$$

Kennt man also die 1. und 2. Stammfunktion des singulären Anteils, so berechnen sich daraus die Gewichte der Formel. Die mehrdimensionalen Fälle von 2.1.5. und 2.1.6. lassen sich dann durch Iterieren dieses Vorgehens aus 2.3.2., durch sog. verallgemeinerte Produktintegration, gewinnen.

2.3.4. Modifizierte Quadraturverfahren

Diese Methode ist auch als "Singularity-Subtraction-Method" bekannt und wurde zur Berechnung von Beispielen in einer Dimension benutzt. Die Anwendung in mehreren Raumdimensionen ist unproblematisch. Das Verfahren ist eine Kombination von Singularitätenelimination und anschließender Quadratur.
Für die eindimensionalen Beispiele fallen 2.1.3. und 2.1.5. bzw. 2.1.4. und 2.1.6. zusammen.
Für n>1 ist folgendes Vorgehen zweckmäßig und bei Vorliegen von Diagonalsingularitäten immer anwendbar.
Ausgehend vom Integraloperator

$$\int_\Omega k(s,t)f(t)dt = Tf(s) \text{ mit } s \in \overline{\Omega}$$

ergibt sich die Identität

$$(1) \quad Tf(s) = \int_\Omega k(s,t)[f(t)-f(s)]dt + \int_\Omega k(s,t)dt\, f(s),$$

und wegen $f \in C(\overline{\Omega})$ schwächt sich der Effekt des singulären Integranden ab. Demgegenüber steht der Nachteil, den 2. Summanden in (1) analytisch oder numerisch berechnen zu müssen.

Um festzustellen, ob die Singularität im ersten Integral von (1) bereits eliminiert ist, muß man die Struktur von f kennen, welche im nächsten Kapitel ausführlich untersucht wird. Mit diesen Strukturanalysen aus Kapitel 3 zeigt man z.B. für die eindimensionalen Beispiele 2.1.5. ($\sigma(s,t)=|s-t|^{-\alpha}$), daß das erste Integral in (1) für $\alpha \in [o,o.5]$ einen nicht-singulären Integranden besitzt.
In den anderen Fällen von "eigentlichen" Singularitäten muß der Kern k durch eine Näherung k_n ersetzt werden; gleichzeitig wird eine geeignete mehrdimensionale Quadraturformel angewendet:

$$(\lambda - \int_{\Omega} k(s,t)dt)\cdot\hat{f}_n(s) + \sum_{j=1}^{n} \omega_{n,j} k_n(s,t_{n,j})[\hat{f}_n(s)-\hat{f}_n(t_{n,j})]=o$$

Als Lösung dieses Ersatzproblems ergibt sich dann:

$$\hat{f}_n(s) = \left(\sum_{j=1}^{n} \omega_{n,j} k_n(s,t_{n,j})\hat{f}_n(t_{n,j}) \right) \div \left(\lambda - \int_{\Omega} k(s,t)dt + \sum_{j=1}^{n} \omega_{n,j} k_n(s,t_{n,j}) \right).$$

Es sollen nun solche Approximationen k_n angegeben werden, die $\hat{f}_n \to f$ sicherstellen.
Um die Darstellung zu vereinfachen, sollen Produktintegrationsmethoden herangezogen werden. Damit bleiben auch in mehreren Dimensionen die wesentlichen Eigenschaften wie Konvergenz und Ordnungsbetrachtungen erhalten. Ansonsten muß im Einzelfall nachgeprüft werden, ob den Anforderungen an die benutzte Quadraturformel Genüge getan ist.
Es geht nun darum, singuläre Kerne geeignet beschränkt zu approximieren.
Sei $k(s,t) = \sigma(\| s-t \|_2)k^*(s,t)$ mit monotonem singulärem Faktor. Die Forderungen

$\sigma \in L_1(o,1) \cap C(o,1]$, $\sigma \geq o$
σ nicht wachsend in $(o,\delta]$, $\delta \in (o,1]$
$k^* \in C(\overline{\Omega}\times\overline{\Omega})$

erfüllen beispielsweise $\sigma(r) = r^{\alpha-n}$, $\alpha \in (o,n)$ oder

$$\sigma(r) = \ln(c/r),\ c \geq 1.$$

Folgt man dem Vorgehen in ANSELONE [2], so muß die Approximation so beschaffen sein, daß

$$o < \delta_n < \delta,\ \delta_n \to o$$
$$\sigma_n \in C[o,1],\ \sigma_n = \sigma \text{ auf } [\delta_n,1]$$
$$o \leq \sigma_n \leq \sigma,\ \sigma_n \text{ nicht wachsend auf } [o,\delta_n]$$
$$\sigma_n(o) \geq \sigma_m(o),\ \text{für } n \geq m.$$

Beispielsweise ist in bestimmten Fällen die Wahl von $\delta_n \geq \rho/n$ mit geeignetem, positivem ρ günstig. Diese Wahl beeinflußt natürlich das Konvergenzverhalten und verkompliziert die Aussagen über die Konvergenzordnungen. Die Konvergenz $\delta_n \to o$ darf naturgemäß nicht zu schnell sein.
Die Approximation darf auch unstetig sein, z.B.

$$k_n(s,t) = o,\ \text{für } |s-t| < \delta_n$$
$$k_n(s,t) = k(s,t),\ \text{für } |s-t| \geq \delta_n.$$

Am günstigsten wäre natürlich ein n-dimensionales Analogon des Verfahrens von ATKINSON [4]:

$$\lambda f^n(s) = \int_\Omega \sigma(\| s-t \|_2) P_n[k^*(s,\cdot) f(\cdot)](t)\,dt,$$

wobei P_n eine Projektion bezüglich t darstellt, z.B. Spline-Interpolation oder spezielle Approximation. (Im Falle einer Raumdimension wurden solche verallgemeinerten Formeln für die lineare Interpolation berechnet.) Dazu müßte man im allgemeinen Fall zumindest

$$\text{die Momente} \qquad \int_\Omega \sigma(\| s-t \|_2)\ t^{|i|}\,dt,\ i \in \mathbb{N}_o^n\ .$$

exakt auswerten können, was schon zu erheblichen Schwierigkeiten führen kann. Würde man dagegen dieses Integral selbst

wieder numerisch approximieren, so ist es fraglich, ob die modifizierte Quadraturformelmethode qualitativ übertroffen würde.

2.3.5. Verfahrensvorschläge für die angegebenen Beispiele

2.1.1. und 2.1.2. sind Beispiele, deren Singularitäten durch einfache Variablensubstitution eliminiert werden können. So existieren auch Verfahren, bei denen man die Singularität implizit in den Gewichten spezieller mehrdimensionaler Quadraturformeln mitberücksichtigt. Über n-dimensionalen Kugeln beispielsweise gibt STROUD [53] (S_n:3-1, S_n:5-2, S_n:5-4, S_2:4-1, S_2:5-1, S_3:5-1) geeignete Formeln an, die in der Dimension, der Anzahl der Punkte und im Grad variieren.

2.1.3. und 2.1.4. fallen für den eindimensionalen Fall mit 2.1.5. bzw. 2.1.6. zusammen. Für n>1 wendet man eine der eben besprochenen modifizierten Quadraturformelmethoden an.

2.1.5. und 2.1.6. werden in einer Raumdimension mit den eben besprochenen verallgemeinerten Quadraturformelmethoden, die man relativ leicht konstruieren kann, berechnet. Für n>1 kann man diese Methoden unter Umständen als Produktformel iteriert anwenden, oder man benutzt wieder ein modifiziertes Quadraturverfahren.

2.1.7. und 2.1.8. erzeugen mehrdimensionale Verallgemeinerungen einer Klasse von Operatoren, die in SCHNEIDER [42] vorgestellt werden, und die man hier zweckmäßig mit Produktquadraturanaloga behandelt.

2.1.9. unterscheidet sich von 2.1.3. lediglich durch einen Faktor, der sich glättend auf das Lösungsverhalten und damit auf das Konvergenzverhalten des numerischen Quadraturprozesses auswirkt.

3. STRUKTUR DER LÖSUNG

Zentral für die Untersuchung der Konvergenzgüte von Quadraturverfahren ist die Frage der Glattheit des Integranden. Insbesondere spielt dann bei Integralgleichungsproblemen, die mit der Quadraturformelmethode behandelt werden, bei diesen Genauigkeitsfragen die Gestalt der unbekannten Lösung eine wesentliche Rolle; die Lösung soll im folgenden formal untersucht werden. Aber auch im vorigen Kapitel wurde schon deutlich, daß es zur optimalen Gestaltung einer modifizierten Quadraturformelmethode unumgänglich ist, die Struktur der Lösung a priori zu untersuchen.

3.1. Parameterunabhängige Beispiele

Diese Fälle, in denen der singuläre Anteil des Kerns nicht vom Parameter s abhängt, sind unkritisch, wie man leicht einsieht:
Ist nämlich der stetige Anteil des Kerns nur hinreichend glatt, so kann man den Operator differenzieren, und die Lösung des Eigenwertproblems besitzt dieselben qualitativen Eigenschaften:

$$Tf(s) = \int_{\Omega} \sigma(t) Dk^*(s,t) f(t) dt \ .$$

Dabei bezeichnet D den gewöhnlichen Differentialoperator, und für hinreichend glattes k^* kann man von einem glatten Lösungsverlauf ausgehen.
BECHLARS [11] untersucht, auch in den verschiedenen parameterabhängigen Fällen, Vertauschungsfragen von Differentiation und Integration. Im Falle von Kerndiagonalsingularitäten liegen diese Fragen tiefer.

3.2. Eindimensionale parameterabhängige Beispiele vom Faltungstyp

In den parameterabhängigen Fällen kann man den Operator T nicht ohne weiteres differenzieren. Man muß zunächst den Parameter aus der Singularität hinaustransformieren. Um die Theorie sauber zu formulieren, benötigt man im folgenden einige Definitionen aus der Theorie der Distributionen, insbesondere der Sobolev- und Nikol'skii-Räume, wie sie in CHANDLER [15] und GRAHAM [23] definiert werden. Der Ausgangspunkt dieser Theorie liegt darin begründet, daß man nachweisen kann, daß die Lösung des homogenen Problems "bis auf Randpunkte von Ω" beliebig glatt ist. Würde man sich mit der Theorie der L_p-Räume begnügen, so bekäme man nicht die volle Information über das Lösungsverhalten, da L_p-Räume wesentlich mehr Elemente als die genannten Räume enthalten. Die Eigenschaft des Kerns, vom Faltungstyp zu sein, ist allerdings eine wesentliche Einschränkung für diese Betrachtungen.

3.2.1. Distributionentheorie; Definitionen und Standardresultate(WALTER [56], GRAHAM [23], CHANDLER [15])

a) $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ heißt <u>lokal-integrierbar</u> $:\Leftrightarrow$
f ist über jede Kugel $K_R := \{x \in \mathbb{R}^n : \| x \|_2 \leq R\}$ Lebesgue-integrierbar.

b) <u>Testfunktionen:</u>

i) Tr $\Phi := \overline{\{x \in \mathbb{R}^n : \Phi(x) \neq o\}}$ heißt <u>Träger von Φ</u>, $\Phi: \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$.

ii) $\Phi: \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ heißt <u>finit</u> ("<u>hat kompakten Träger</u>"): $\Leftrightarrow$
Tr Φ ist beschränkt (und damit kompakt).

iii) $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n) := \{$finite, im $\mathbb{R}^n$ beliebig oft stetig differenzierbare Funktionen$\}$
Die Elemente von $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ heißen <u>Testfunktionen</u>.
Für $\mathcal{D}(\Omega)$ gilt entsprechendes.

c) Identifizieren von Funktion f(x) und Funktional F(Φ).
Für lokal-integrierbare Funktionen f kann man identifizieren:

$$F(\Phi) := (f,\Phi) := \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\Phi(x)dx\,,\ \Phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n),\ F \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$$

Das durch f erzeugte Funktional F nennt man (reguläre) Distribution. $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ ist der Dualraum von $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, seine Elemente also lineare, stetige Funktionale.

d) Ableitung einer Distribution:
Sei p ein Multiindex, d.h. $p \in \mathbb{N}_o^n$, $p=(p_1,\ldots,p_n)$.
Dann gilt:

$$D^{(p)}F(\Phi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)D^{(p)}\Phi(x)dx\cdot(-1)^{|p|},\ |p| := p_1+..+p_n$$

$D^{(p)}$ bezeichnet dabei einen partiellen Differentialoperator.

e) $W_p^m(\Omega) := \{\ \Phi \in L_p(\Omega) \mid D^{(i)}\Phi \in L_p(\Omega),\ |i|\le m,\ i\in\mathbb{N}_o^n\}$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$
heißen Sobolev-Räume ($1\le p<\infty$; m=o,1,2,...)
Zusammen mit der Norm

$$\|\Phi\|_p^m := \Big(\sum_{|i|\le m} (\|D^{(i)}\Phi\|_p)^p\Big)^{1/p}$$

bilden sie Banachräume. In einer Dimension hat man folgende Charakterisierung:
Falls $\Omega=(o,1)$, $I=[o,1]$, $p\ge 1$, so gilt:

$$W_p^m(\Omega) = \{\Phi\in C^{m-1}(I):\ \Phi^{(m-1)} \text{absolutstetig in I},\ \Phi^{(m)}\in L_p(\Omega)\}.$$

Falls $\Phi \in C^{(k)}(\Omega)$, gilt: $D^{(k)}\Phi = \Phi^{(k)}$ im klassischen Ableitungssinn in Ω.

f) $N_1^\alpha(I) := \{\ \Phi \in W_1^{[\alpha]}(I):\ \|\Phi\|_{\alpha,1,I}<\infty\ \}$ heißen Nikol'skii-Räume. Dabei bezeichnet I ein abgeschlossenes Intervall, z.B. I=[o,1] und [α]:=ENTIER-Funktion.
Für die Norm gilt:

$$\|\Phi\|_{\alpha,1,I} = \|\Phi\|_{1,I} + |\Phi|_{\alpha,1,I}$$

mit $|\phi|_{\alpha,1,I} = \sup_{\varepsilon>0} \{\varepsilon^{-\alpha_0} \|\Delta_\varepsilon \phi^{([\alpha])}\|_{1,I_\varepsilon}\}$, $0<\alpha_0\leq 1$ und

$\alpha=[\alpha]+\alpha_0$, $\Delta_\varepsilon\phi=\phi(x+\varepsilon)-\phi(x)$, $I_\varepsilon=\{x|x+\varepsilon\in I\}$.

Mit dieser Norm sind $(N_1^\alpha(I), \|\cdot\|_{\alpha,1,I})$ Banachräume; CHANDLER [15]. Hinter dieser Definition steht die Idee, Ableitungen durch Differenzenquotienten zu ersetzen, um auch für nicht differenzierbare Funktionen Aussagen machen zu können.

3.2.2. Die 1. Ableitung der Lösung

Wählt man den Fall $\sigma(s,t) = \sigma(|s-t|)$ in einer Raumdimension wie in allen Beispielen 2.1.3.-2.1.9. (in 2.1.7.-2.1.9. kann man die zusätzlichen Terme mit in k^* hineinziehen), so kann zunächst folgender Satz gezeigt werden:

SATZ 1: Für die Lösung f des homogenen Problems gilt $Df \in L_1(\Omega)$.

BECHLARS [11] untersucht diese Frage für inhomogene Probleme und verschiedene Operatortypen, die z.B. durch diagonalsinguläre Kerne, Kerne, die auf der Diagonalen Sprünge aufweisen und Kerne, die Randsingularitäten aufweisen, erzeugt werden.

Beweis: Für die Beispiele 2.1.3.-2.1.9. gilt $k\in N_1^\alpha[a-b,b-a]$, falls $I=[a,b]$, $0<\alpha<1$ bzw. für die logarithmischen Fälle entsprechend $k\in N_1^1[a-b,b-a]$. Nach GRAHAM ([23], S.47) , gibt es dann ein $n<\infty$, so daß gilt:

$$T^n: L_1(a,b) \to W_1^1(a,b).$$

Da eine Eigenfunktion, die $Tf = \lambda f$ erfüllt, auch $T^n f=\lambda^n f$ erfüllt, gilt

$$f \in W_1^1(a,b). \qquad \square$$

Damit kann man jetzt zeigen, daß für die erste Ableitung $f'=Df$ mit denselben Singularitäten wie bei $\sigma+\sigma_1$, $\sigma_1=\sigma(b-s)$, also mit Randsingularitäten, die von der Stärke der Kern-

singularität α abhängen, zu rechnen ist, bzw., daß die Ableitungen der Lösung nicht stetig auf den Rand fortsetzbar sind:

SATZ 2: O.E.d.A. sei $k^* \equiv 1$ vorausgesetzt; sei $f \in C[o,b]$, $Df \in L_1(o,b)$. Dann gilt:

$$DTf = TDf + f(o)\sigma - f(b)\sigma_1 .$$

Dabei ist wieder $\sigma(s,t)=\sigma(|s-t|)$ vorausgesetzt.

Beweis: $$Tf(s) = \int_o^s \sigma(s-t)f(t)dt + \int_s^b \sigma(t-s)f(t)dt .$$

Substituiert man $\tau=s-t$ bzw. $\tau=t-s$, so ergibt sich

$$Tf(s) = \int_o^s \sigma(\tau)f(s-\tau)d\tau + \int_o^{b-s} \sigma(\tau)f(s+\tau)d\tau .$$

Differenziert man das Integral, dessen Integrand und Integrationsgrenzen parameterabhängig sind, nach dem Parameter s, so ergibt sich (siehe BRONSTEIN [14], S.348):

$$DTf(s) = \int_o^s \sigma(\tau)Df(s-\tau)d\tau + \int_o^{b-s} \sigma(\tau)Df(s+\tau)d\tau +$$

$$+ f(o)\sigma(s) - f(b)\sigma(b-s) . \qquad \square$$

3.2.3. Höhere Ableitungen der Lösung; ein Struktursatz

An der Strukturkenntnis höherer Ableitungen ist man immer dann interessiert, wenn Verfahren höherer Ordnung zur Anwendung kommen sollen. Solche Verfahren erbringen nur dann wesentliche Vorteile gegenüber einfacher strukturierten Lösungsmethoden, wenn die Eigenfunktion ein glattes Ableitungsverhalten aufweist, da in die Fehlereinflußgrößen i.a. höhere Ableitungsordnungen eingehen. Auch für stetige, aber nicht-glatte Kerne sind diese Untersuchungen deshalb von einiger Bedeutung.

Präzisiert man die Voraussetzungen an den Operator in Anlehnung an VAINIKKO/PEDAS [54] weiter:

$$Tf(s) = \int_0^b \sigma(|s-t|)k^*(s,t)f(t)dt$$

$0 \leq s \leq b$, $b < \infty$

$\sigma \in C^{m-1}(o,b]$, $m \geq 1$

$k^* \in C^{m-1}[o,b]^2$, $m \geq 1$

$|\sigma^{(k)}(s)| \leq \gamma_k s^{-\alpha-k}$

$|\sigma^{(k)}(s)| \geq \gamma_k^o s^{-\alpha_o-k}$, $k=o(1)m-1$

$o \leq s \leq s_o$

$\gamma_k, \gamma_k^o, s_o > o$

$o < \alpha < 1$, $\alpha-(1-\alpha) < \alpha_o \leq \alpha$

welche

1.) $\sigma(s) = \log(s) + \sigma_o(s)$ mit $\alpha_o = o$, $\alpha = \varepsilon$ $\varepsilon > o$

2.) $\sigma(s) = s^{-\beta} + \sigma_o(s)$ mit $\alpha = \alpha_o = \beta$ und

3.) $\sigma(s) = s^{-\lambda}(\log(s))^n + \sigma_o(s)$ mit $\alpha_o = \lambda$, $\alpha = \lambda+\varepsilon, \varepsilon > o$,
$o \leq \lambda \leq 1$, $1 \leq n < \infty$, $\sigma_o \in C^{m-1}[o,b]$

erfüllen, so kann eine allgemeine Strukturaussage über die Lösung des Eigenwertproblems gewonnen werden:

SATZ 3: Falls die genannten Bedingungen an den Integraloperator erfüllt sind, kennt man das Lösungsverhalten von $Tf = \lambda f$ qualitativ:

$$f \in C[o,b] \cap C^m(o,b),$$
$$|f^{(k)}(s)| \leq \eta_k[s^{-\alpha-k+1} + (b-s)^{-\alpha-k+1}], \quad s \in (o,b),$$
$$\eta_k > o, \quad k=o(1)m,$$

oder präziser:

$$f^{(k)}(s) = f(o)\sigma^{(k-1)}(s) - f(b)\sigma_1^{(k-1)}(s) + v_k(s),$$

wobei $v_k \in C^{m-k}(o,b)$ und

$$\lim_{s \to o+}(v_k(s) / \sigma^{(k-1)}(s)) = o \quad \text{und} \quad \lim_{s \to b-}(v_k(s) / \sigma_1^{(k-1)}(s)) = o$$

gilt.

Der Satz läßt sich auch für ein beliebiges anderes Intervall [a,b] zeigen; ebenso dürfte σ in diesem Intervall endlich viele Unstetigkeitsstellen besitzen oder von der Struktur $\sigma=\sigma(s-t)$ sein. Auch bei stetigen, aber nicht hinreichend oft differenzierbaren σ-Anteilen des Kerns liefert der Satz wichtige Aussagen über das Lösungsverhalten und damit für die numerischen Behandlungsmöglichkeiten.
Zum Beweis des Satzes werden relativ umfangreiche Vorarbeiten benötigt, die im folgenden bereitgestellt werden.

Lemma 1: Wenn die genannten Voraussetzungen an den schwachsingulären Integraloperator erfüllt sind, und $f\in C^{m-1}(o,b)$ und $|f^{(k)}(t)|\leq a_k[t^{-\beta-k}+(b-t)^{-\beta-k}]$ gilt, mit $o<t<b$, $o<\beta<1$, $k=o(1)m-1$, dann gilt für $z=Tf$

$$\text{i)}\quad z\in C^{m-1}(o,b)$$
$$\text{ii)}\quad |z^{(k)}(t)|\leq a_k'[t^{-\beta-k+1-\alpha}+(b-t)^{-\beta-k+1-\alpha}]\ ,$$
$$\text{mit } o<t<b,\ k=o(1)m-1,\ a_k,a_k'>o,$$

was man wie in VAINIKKO/PEDAS [54] mit Ableitungen im Distributionensinn beweist. Dabei nutzt man die Differenzierbarkeitseigenschaften der Testfunktionen $\varphi\in\mathcal{D}((o,b))$ aus, für die gilt:

$$T\varphi\in C^{\infty}[o,b] \text{ und}$$
$$D^{(k)}T\varphi = TD^{(k)}\varphi\ ,\quad k=o,1,2,\ldots$$

Lemma 2: Seien o.g. Voraussetzungen wieder erfüllt; $j,i,n\geq o$, $i+n\leq m-1$, $1\geq 1/(1-\alpha-\varepsilon)$ mit $\varepsilon>o$ und $\varepsilon+\alpha<1$.
Dann gilt:

$$|(D^{(i)}T^{j}(DT^{l})^{n}\sigma)(t)| \leq a_{i,j,l,n,\varepsilon}[t^{-i+r_{j,\alpha,\varepsilon}}+(b-t)^{-i+r_{j,\alpha,\varepsilon}}]$$

wobei $r_{j,\alpha,\varepsilon}:=\min\{1-\alpha-\varepsilon, j-(j+1)(\alpha+\varepsilon)\}$, $a_{i,j,l,n,\varepsilon}>o$.

Dabei existieren alle Ableitungen auf der linken Seite der Ungleichung im klassischen Sinn. Dasselbe gilt, wenn man in

der Ungleichung σ durch σ_1 ersetzt. Den Beweis dieses Lemmas entnimmt man VAINIKKO/PEDAS [54].

Lemma 3: Es gelten die genannten Voraussetzungen mit k=o. Dann ist T in C[o,b]=:C und $L_p(o,b)=:L_p$, $1\leq p<\infty$ kompakt, und es gilt:

(i) $T: L_p \to L_q$ mit $p<q<p/(1-(1-\alpha)p)$

(ii) $\exists\, l \in \mathbb{N}$, $l>o$: $T^l: L_1 \to C$.

Den Beweis entnimmt man EDWARDS [21].

Korollar 1: (i) Falls i=j=o ergibt sich aus Lemma 2:

$$|((DT^l)^n\sigma)(t)| \leq a_{o,o,l,n,\varepsilon}[t^{-\alpha-\varepsilon} + (b-t)^{-\alpha-\varepsilon}].$$

Deswegen ist $(DT^l)^n\sigma \in L_1$ und $(DT^l)^n\sigma_1 \in L_1$ für n=o(1)m-1.

(ii) Wegen (ii) aus Lemma 3 und Satz 1 betrachten wir im folgenden $l\geq 1/(1-\alpha-\varepsilon)$, so daß $T^l: L_1 \to C$, $T^l: L_1 \to W_1^1$. Dann gilt:

$T^l(DT^l)^n\sigma \in C$ und $T^l(DT^l)^n\sigma_1 \in C$ für n=o(1)m-1.

Lemma 4: Seien $v,f \in L_1$, $\lambda v = Tv + f$. Dann gilt:

$$v = 1/\lambda^l\, T^l v + Sf, \text{ wenn man}$$

$S:= 1/\lambda\, I + 1/\lambda^2\, T + \ldots + 1/\lambda^l\, T^{l-1}$ abkürzt.

Beweis: $v = 1/\lambda\, Tv + 1/\lambda\, f$. Iterierte Anwendung ergibt:

$$\begin{aligned} v &= 1/\lambda\, T(1/\lambda\, Tv + 1/\lambda\, f) + 1/\lambda\, f = 1/\lambda^2\, T^2 v + 1/\lambda^2\, Tf + 1/\lambda\, f \\ &= 1/\lambda^2\, T^2(1/\lambda\, Tv + 1/\lambda\, f) + 1/\lambda^2\, Tf + 1/\lambda\, f \\ &= 1/\lambda^3\, T^3 v + 1/\lambda^3\, T^2 f + 1/\lambda^2 Tf + 1/\lambda\, f \\ &\vdots \\ &= 1/\lambda^l\, T^l v + Sf \end{aligned}$$

□

Lemma 5: $u_1 := 1/\lambda^l\, T^l v$ mit v aus Lemma 4 erfüllt:

$$u_1' = 1/\lambda\, Tu_1 + 1/\lambda^{l+1}\, T^l f\ .$$

Beweis: $1/\lambda\, Tu_1 + 1/\lambda^{l+1}\, T^l f \underset{\text{Def.}}{=} 1/\lambda^{l+1}\, T^l Tv + 1/\lambda^{l+1}\, T^l f.$

Wegen $Tv = \lambda v - f$ aus Lemma 4 ergibt sich:

$$1/\lambda^{l+1} T^l(\lambda v - f) + 1/\lambda^{l+1} T^l f = 1/\lambda^l T^l v - 1/\lambda^{l+1}\, T^l f +$$

$$1/\lambda^{l+1}\, T^l f = u_1. \qquad \square$$

Lemma 6: Seien die Voraussetzungen von Satz 3 erfüllt. Sei $1 \le k \le m$, $S := 1/\lambda\, I + 1/\lambda^2\, T + \ldots + 1/\lambda^l\, T^{l-1}$, (λ, f) eine Lösung der Eigenwertaufgabe. Dann gilt:

$$D^{(k)} f = D^{(k-1)} S[f(o)\sigma - f(b)\sigma_1]$$

$$+ D^{(k-2)} S[1/\lambda^l\, (f(o)(DT^l)\sigma - f(b)(DT^l)\sigma_1) + u_1(o)\sigma - u_1(b)\sigma_1]$$

$$+ \ldots + D^{(o)} S[1/\lambda^{(k-1)l}\, (f(o)(DT^l)^{k-1}\sigma - f(b)(DT^l)^{k-1}\sigma_1) +$$

$$1/\lambda^{(k-2)l}\, (u_1(o)(DT^l)^{k-2}\sigma - u_1(b)(DT^l)^{k-2}\sigma_1) + \ldots +$$

$$u_{k-1}(o)\sigma - u_{k-1}(b)\sigma_1] + u_k \quad \text{mit stetigen Funktionen } u_i,$$

$$i = 1(1)k.$$

Beweis: Definiert man $u_1 := 1/\lambda^l\, T^l Df$, so ergibt sich mit $Df \in L_1$ und Satz 2:

$$\lambda Df = TDf + f(o)\sigma - f(b)\sigma_1$$

und mit Lemma 4:

$$Df = 1/\lambda^l\, T^l Df + S[f(o)\sigma - f(b)\sigma_1]$$

$$= u_1 + S[f(o)\sigma - f(b)\sigma_1]\ .$$

Nach Lemma 5 erfüllt u_1:

$$u_1 = 1/\lambda\ Tu_1 + 1/\lambda^{l+1}[f(o)T^l\sigma - f(b)T^l\sigma_1]$$

Damit gilt nun für u_1 nach Korollar 1, Lemma 1 und Lemma 3:

$u_1 \in C$, da $T^l\sigma,\ T^l\sigma_1 \in C$;

$Du_1 \in L_1$, da $(DT^l)\sigma,\ (DT^l)\sigma_1 \in L_1$.

Iterierte Anwendung von Lemma 4 und Lemma 5 führt auf:

$$\lambda Du_1 = DTu_1 + 1/\lambda^l\ [f(o)(DT^l)\sigma - f(b)(DT^l)\sigma_1]$$

$$= \underset{\text{Satz 2}}{TDu_1} + u_1(o)\sigma - u_1(b)\sigma_1 + 1/\lambda^l \cdot$$

$$[f(o)(DT^l)\sigma - f(b)(DT^l)\sigma_1] .$$

Mit Lemma 4 gilt dann:

$$Du_1 = 1/\lambda^l\ T^lDu_1 + S[u_1(o)\sigma - u_1(b)\sigma_1 + 1/\lambda^l \cdot$$

$$[f(o)(DT^l)\sigma - f(b)(DT^l)\sigma_1]]$$

und wegen Lemma 5 erfüllt $u_2 := 1/\lambda^l T^l Du_1$:

$$u_2 = 1/\lambda\ Tu_2 + 1/\lambda^{l+1}\ T^l[u_1(o)\sigma - u_1(b)\sigma_1 + 1/\lambda^l[f(o)(DT^l)\sigma -$$

$$f(b)(DT^l)\sigma_1]]$$

und damit gilt wieder $u_2 \in C$, $Du_2 \in L_1$.

Erneute Differentiation ergibt dann:

$$\lambda Du_2 = DTu_2 + 1/\lambda^l\ DT^l \cdot$$

$$\cdot [u_1(o)\sigma - u_1(b)\sigma_1 + 1/\lambda^l\ [f(o)(DT^l)\sigma - f(b)(DT^l)\sigma_1]]$$

$$= \underset{\text{Satz 2}}{TDu_2} + u_2(o)\sigma - u_2(b)\sigma_1 + 1/\lambda^l DT^l \cdot$$

$$\cdot [u_1(o)\sigma - u_1(b)\sigma_1 + 1/\lambda^l[f(o)(DT^l)\sigma - f(b)(DT^l)\sigma_1]].$$

Mit Lemma 4 gilt dann wieder:

$$Du_2 = 1/\lambda^l T^l Du_2 + S[u_2(o)\sigma - u_2(b)\sigma_1 + 1/\lambda^l[u_1(o)(DT^l)\sigma - u_1(b)(DT^l)\sigma_1] +$$

$$+1/\tilde{\lambda}^{2l}[f(o)(DT^l)^2\sigma - f(b)(DT^l)^2\sigma_1]]$$

$$\vdots$$

$$Du_{k-1} = u_k + S[1/\lambda^{(k-1)l}\,(f(o)(DT^l)^{k-1}\sigma - f(b)(DT^l)^{k-1}\sigma_1)$$

$$+ \quad 1/\lambda^{(k-2)l}\,(u_1(o)(DT^l)^{k-2}\sigma - u_1(b)(DT^l)^{k-2}\sigma_1)$$

$$+\ldots+u_{k-1}(o)\sigma - u_{k-1}(b)\sigma_1] = u_k + \tilde{Sf}\text{(abkürzend)}$$

mit $\lambda u_k = Tu_k + 1/\lambda^l\, T^l\tilde{f}$, $u_k \in C$.

Daraus kann dann stufenweise das Ergebnis des Lemmas gewonnen werden:

$$D^{(k)}f = D^{(k-1)}u_1 + D^{(k-1)}S[f(o)\sigma - f(b)\sigma_1]$$

$$= D^{(k-1)}S[f(o)\sigma - f(b)\sigma_1]$$

$$+ D^{(k-2)}S[1/\lambda^l\,(f(o)(DT^l)\sigma - f(b)(DT^l)\sigma_1) + u_1(o)\sigma - u_1(b)\sigma_1]$$

$$+ D^{(k-2)}u_2$$

$$= D^{(k-1)}S[f(o)\sigma - f(b)\sigma_1]$$

$$+ D^{(k-2)}S[1/\lambda^l\,(f(o)(DT^l)\sigma - f(b)(DT^l)\sigma_1) + u_1(o)\sigma - u_1(b)\sigma_1]$$

$$+ D^{(k-3)}S[1/\lambda^{2l}(f(o)(DT^l)^2\sigma - f(b)(DT^l)^2\sigma_1 +$$

$$+ 1/\lambda^l\,(u_1(o)(DT^l)\sigma - u_1(b)(DT^l)\sigma_1 + u_2(o)\sigma - u_2(b)\sigma_1]$$

$$+D^{(k-3)}u_3$$

u.s.w. ∎

Damit kann man jetzt Satz 3 beweisen:
Aus Lemma 6 in Verbindung mit Lemma 2 bzw. Korollar 1 folgt die 1. Behauptung des Satzes:

$$f \in C[o,b] \cap C^m(o,b)$$

Wenn man sich die Aussage von Lemma 6 ansieht, stellt man fest, daß der Anteil mit der stärksten Singularität

$$f(o)D^{(k-1)}\sigma - f(b)D^{(k-1)}\sigma_1 \quad \text{ist.}$$

Der in dieser Folge nächste Ausdruck ist

$$f(o)D^{(k-1)}T\sigma - f(b)D^{(k-1)}T\sigma_1 \ .$$

Nach Lemma 2 gilt:

$$|f(o)D^{(k-1)}T\sigma - f(b)D^{(k-1)}T\sigma_1| \leq \text{const } [\, t^{-\ell} + (b-t)^{-\ell}] \ ,$$

$\ell = (k-1)-1+2\alpha+2\varepsilon$. Falls $\varepsilon>o$ hinreichend klein ist, gilt mit $\alpha-(1-\alpha)<\alpha_o$ †)

$$-(k-1)-\alpha_o<-(k-1)+1-2\alpha-2\varepsilon \quad \text{†)}$$

und wegen $|\sigma^{(k-1)}(t)| \geq \gamma_k^o \, t^{-(k-1)-\alpha_o}$ †)

und $|\sigma_1^{(k-1)}(t)| \geq \gamma_k^o (b-t)^{-(k-1)-\alpha_o}$ †) gilt:

$v_k \in C^{m-k}(o,b)$ und $\lim\limits_{t\to o+} v_k(t) \,/\, \sigma^{(k-1)}(t) = o$

und $\lim\limits_{t\to b-} v_k(t) \,/\, \sigma_1^{(k-1)}(t) = o$

Klar ist dann die Darstellung

$$f^{(k)}(t) = f(o)\sigma^{(k-1)}(t) - f(b)\sigma_1^{(k-1)}(t) + v_k(t)$$

aus Lemma 6 mit offensichtlicher Bedeutung der v_k, was den Satz vollständig beweist. ∎

Bemerkungen: $Df \in L_1$ kann man auch elementar über die Absolutstetigkeit von f zeigen. Man zeigt dazu in der Nomenklatur von BECHLARS [11] :

$$f \in C^{(n,\alpha)}[o,1] \quad (\text{o.E. } I=[o,1]),$$

wenn k aus endlich vielen Summanden der Form

$$\sigma(|s-t|)k^*(s,t), \ \sigma \in C^{(n,\alpha)}[o,1] \cap C^n(o,1] \ ,$$

---

†) Vgl. Bedingungen an den Operator

$$k^*(s,t) := \begin{cases} k_1^*(s,t), & \text{für } t \leq s \\ k_2^*(s,t), & \text{für } t > s \end{cases}$$

mit k_1^*, $k_2^* \in C^n([o,1]\times[o,1])$ besteht.Auch Sprünge auf der Diagonalen sind damit zulässig. Dabei bedeutet

$C^{(o,\alpha)}[o,1] :=$

$$\begin{cases} \{ f \in C(o,1) : \exists\, A \in \mathbb{R} : |f(t)| \leq \begin{cases} t^\alpha, & \text{für } t \leq o.5 \\ (1-t)^\alpha, & \text{für } t > o.5 \end{cases} \}, \alpha < o \\ \{ f \in C(o,1) : \exists\, A \in \mathbb{R} : |f(t)| \leq \begin{cases} |\ln(t)|, & \text{für } t \leq o.5 \\ |\ln(1-t)|, & \text{für } t > o.5 \end{cases} \}, \alpha = o \end{cases}$$

Auch für die Fälle $\not{o}<\alpha<1$, $\alpha=1$, $\alpha>1$ können solche Definitionen angegeben werden. Für $n \geq 1$ gilt dann:

$$C^{(n,\alpha)}[o,1] := \{f \in C^n(o,1) : f^{(n)} \in C^{(o,\alpha-n)}[o,1]\}.$$

3.3. Spezialfälle in mehreren Dimensionen

Der mehrdimensionale Fall beinhaltet zu den unterschiedlichen Singularitätsarten noch die Schwierigkeit, daß bei verschiedenen Grundgebieten auch unterschiedliche Aussagen über die Glattheit der Lösung entstehen.
In jedem Fall ist zunächst auch wieder $Df \in L_1$ zu zeigen, was man wie folgt einsieht (vgl. etwa VAINIKKO/PEDAS [54]):

Man approximiert den schwachsingulären Kern σ durch geeignete glatte Kerne σ_{1n}; die Lösungen f_n dieser Ersatzprobleme erfüllen dann $f_n \in W_1^1$, und damit gilt für den Grenzwert $f \in W_1^1$.
Dann kann man den Operator wieder differenzieren, da Vertauschung von Differentiation und Integration möglich ist.
Im folgenden werden die eingangs besprochenen Beispiele der Reihe nach behandelt.

3.3.1. Produktsingularität über einem Intervall

Bei den Beispielen 2.1.5. bzw. 2.1.6. wird sich herausstellen, daß partielle Ableitungen der Lösung schlechtestenfalls auf dem gesamten Rand von Ω Singularitäten aufweisen (die Ableitungen der Lösung lassen sich nicht auf den Rand fortsetzen). Dabei hängt dieses Verhalten wesentlich von der Art der Berandung von Ω ab.
Betrachtet man zunächst $\overline{\Omega} = [0,1]\times[0,1]$ und

$$Tf(s,t) = \int_0^1\int_0^1 |s-x|^{-\alpha}|t-y|^{-\beta} f(x,y)\,dxdy$$

und substituiert man $\sigma=s-x$, $\sigma_1=t-y$ bzw. $\sigma=x-s$, $\sigma_1=y-t$, so erhält man

$$Tf(s,t)=\int_0^t \sigma_1^{-\beta}\Big[\int_0^s \sigma^{-\alpha} f(s-\sigma,t-\sigma_1)\,d\sigma+\int_0^{1-s}\sigma^{-\alpha} f(\sigma+s,t-\sigma_1)\,d\sigma\Big]d\sigma_1 +$$

$$+\int_0^{1-t}\sigma_1^{-\beta}\Big[\int_0^{s}\sigma^{-\alpha}f(s-\sigma,t+\sigma_1)d\sigma+\int_0^{1-s}\sigma^{-\alpha}f(\sigma+s,t+\sigma_1)d\sigma\Big]d\sigma_1 .$$

Um differenzieren zu können, muß man nämlich zunächst den Parameter s bzw. t aus der Singularität eliminieren. Da $Df \in L_1$ kann man iteriert nach dem Parameter differenzieren. Die Variable, nach der differenziert wird, ist jeweils durch Indizierung ersichtlich. Somit erhält man:

$$D_1Tf(s,t) = TD_1f(s,t)+s^{-\alpha}\Big[\int_0^{t}\sigma_1^{-\beta}f(o,t-\sigma_1)d\sigma_1+\int_0^{1-t}\sigma_1^{-\beta}f(o,t+\sigma_1)d\sigma_1\Big]$$

$$-(1-s)^{-\alpha}\Big[\int_0^{t}\sigma_1^{-\beta}f(1,t-\sigma_1)d\sigma_1+\int_0^{1-t}\sigma_1^{-\beta}f(1,t+\sigma_1)d\sigma_1\Big] \quad \text{bzw.}$$

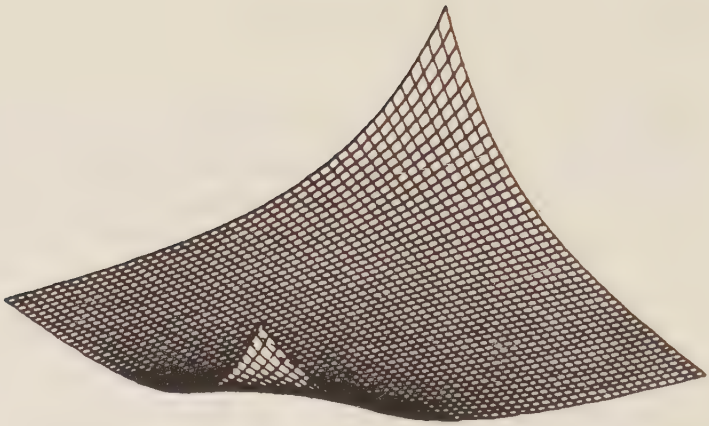
$$D_2Tf(s,t) = TD_2f(s,t) + t^{-\beta}\Big[\int_0^{s}\sigma^{-\alpha}f(s-\sigma,o)d\sigma+\int_0^{1-s}\sigma^{-\alpha}f(s+\sigma,o)d\sigma\Big]$$

$$-(1-t)^{-\beta}\Big[\int_0^{s}\sigma^{-\alpha}f(s-\sigma,1)d\sigma+\int_0^{1-s}\sigma^{-\alpha}f(s+\sigma,1)d\sigma\Big] .$$

Die Verallgemeinerung auf höhere Raumdimensionen n und $I=[a,b]$, $a,b\in\mathbb{R}$, $\Omega=I^n$ ist offensichtlich, der logarithmische Fall paßt sich in die Betrachtungen ein.
Aus diesen Darstellungen wird ersichtlich, daß bei diesen Beispielen auf dem gesamten Rand des Integrationsbereichs mit Ableitungssingularitäten zu rechnen ist, was Auswirkungen auf die Konvergenzgüte des gewählten numerischen Verfahrens haben muß. Abbildung 1 veranschaulicht dieses Verhalten.

3.3.2. Produktsingularität über einer Kugel

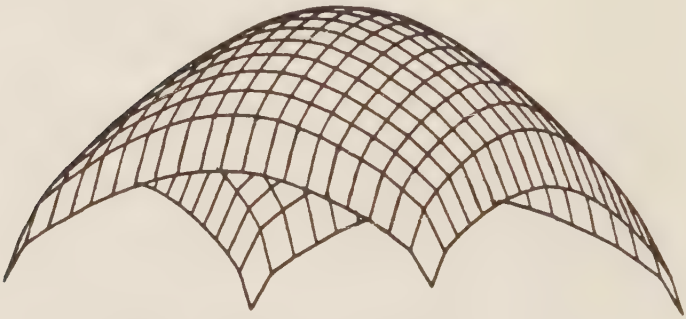
Wählt man für Ω den Einheitskreis (n=2), so ergibt sich hingegen folgendes Bild:



Berechnete Eigenfunktion am Beispiel:

$k(s,t,x,y) = \sqrt{(s-x)^2+(t-y)^2}^{-1}$ über $\Omega = [o,1] \times [o,1]$

Verfahren: Modifizierte Simpsonregel.



Berechnete Eigenfunktion am Beispiel:

$k(s,t,x,y) = |s-x|^{-1/2} \cdot |t-y|^{-1/2}$ über $\Omega = [o,1] \times [o,1]$

Verfahren: Gewicht $w(s,t,x,y) = k(s,t,x,y)$,

lineare Interpolation der Lösung.

(Verallgemeinerte Trapezregel)

Abbildungen 1 und 2

$$Tf(s,t) = \iint_{\sqrt{x^2+y^2}<1} |s-x|^{-\alpha}|t-y|^{-\beta} f(x,y)\,dxdy$$

Folgende Transformation scheint zweckmäßig:

$$s-x = r\cos(\varphi)$$
$$t-y = r\sin(\varphi)$$

Die Funktionaldeterminante dieser Transformation hat den Wert r. Die Gebietstransformation entnimmt man einer geometrischen Überlegung.

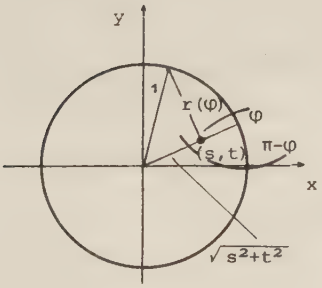


Abbildung 3:
Gebietstransformation

Durchläuft φ den Winkelbereich $[o,2\pi]$, so berechnet sich r aus allgemeinen Dreieckssätzen. Man kennt 2 Seiten und einen Winkel. Daraus ergibt sich

$$r = \sin(\varphi-B)/\sin(\varphi),$$

wenn $\sin(B)=\sqrt{s^2+t^2}\sin(\varphi)$; siehe etwa BRONSTEIN [14], S. 16o.

Somit ergibt sich

$$Tf(s,t) = \int_o^{2\pi} \int_o^{\sin(\varphi-B)/\sin(\varphi)} r^{1-\alpha-\beta} |\sin(\varphi)|^{-\beta} |\cos(\varphi)|^{-\alpha} \tilde{f}(r,\varphi)\,drd\varphi$$

Dabei ist $\tilde{f}(r,\varphi) = f(s-r\cos(\varphi),t-r\sin(\varphi))$. Differenziert man den Operator, dessen Grenzen parameterabhängig sind, nach s oder t, so erhält man den folgenden "kritischen Term", der über das Ableitungsverhalten entscheidet:

$$\int_0^{2\pi} |\sin(\varphi)|^{-\beta} |\cos(\varphi)|^{-\alpha} f\left(s-\frac{\sin(\varphi-B)}{\sin(\varphi)}\cos(\varphi), t-\frac{\sin(\varphi-B)}{\sin(\varphi)}\sin(\varphi)\right)$$
$$\cdot (\sin(\varphi-B)/\sin(\varphi))^{1-\alpha-\beta} \cos(\varphi-B)/\sin(\varphi) \cdot B' \, d\varphi$$

Dabei steht B' entweder für

$$\partial B/\partial t = t \sin(\varphi)/\cos(B)/\sqrt{s^2+t^2} \quad \text{oder für}$$

$$\partial B/\partial s = s \sin(\varphi)/\cos(B)/\sqrt{s^2+t^2} \; .$$

Man stellt fest, daß

1.) nur für Punkte auf dem Kreisrand Schwierigkeiten zu erwarten sind und

2.) daß man die Fälle $\alpha+\beta > 1$ und $\alpha+\beta \leq 1$ getrennt behandeln muß und nur für $\alpha+\beta > 1$ Randsingularitäten vorliegen können.

3.3.3. Produktsingularität über Dreiecken

Ist der Integrationsbereich ein Dreieck, so können die partiellen Ableitungen der Lösung auf Dreiecksseiten singulär sein. Natürlich spielt auch die Gestalt der Dreiecke eine Rolle.
Betrachtet man den Spezialfall des Standarddreiecks, so zeigt sich, daß die Ableitungen der Lösung nicht auf den gesamten Rand fortsetzbar sind.

$$\bar{\Omega} = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [-1,1], \; -(1+x)/2 \leq y \leq (1+x)/2 \};$$

$$Tf(s,t) = \int_{-1}^{1} \int_{-(1+x)/2}^{(1+x)/2} |s-x|^{-\alpha} |t-y|^{-\beta} f(x,y)\,dy\,dx$$

$$= \int_{s+1}^{s-1} \int_{t+(1+s-\sigma)/2}^{t-(1+s-\sigma)/2} |\sigma|^{-\alpha} |\sigma_1|^{-\beta} \tilde{f}(\sigma,\sigma_1)\,d\sigma_1\,d\sigma,$$

$$(\sigma = s-x) \quad (\sigma_1 = t-y)$$

woraus folgt, daß

$$D_s Tf(s,t) = \int_{s+1}^{s-1} D_s \int_{t+(1+s-\sigma)/2}^{t-(1+s-\sigma)/2} |\sigma|^{-\alpha} |\sigma_1|^{-\beta} \tilde{f}(\sigma,\sigma_1) d\sigma_1 d\sigma +$$

$$\left(\int_{t+1}^{t-1} |\sigma_1|^{-\beta} \tilde{f}(\sigma_1) d\sigma_1 \right) |s-1|^{-\alpha} + \text{"andere Terme"}.$$

Diese letzten Terme sind für die Betrachtungen nicht von weiterer Bedeutung.
Insgesamt muß man nach Art und Stärke der Singularität und nach der Berandung des Integrationsbereichs unterscheiden. Im Falle von Normsingularitäten, wie sie etwa in den Beispielen 2.1.3. und 2.1.4. auftauchen, stellt sich die Situation anders dar.

3.3.4. Normsingularität über einem Intervall

Legt man als Spezialfall eines Intervalles in zwei Dimensionen das Einheitsquadrat zugrunde, und betrachtet man exemplarisch den Operator

$$Tf(s,t) = \int_{00}^{11} \sqrt{(s-x)^2+(t-y)^2}^{-\alpha} f(x,y)\,dxdy ,$$

und transformiert man parameterabhängig

$$s-x = r\cos(\varphi)$$
$$t-y = r\sin(\varphi),$$

so erhält man durch die Gebietstransformation 4 Teilintegrale:

$$Tf(s,t) =$$

$$\int_{\text{arctg}(-t/(1-s))}^{\text{arctg}((1-t)/(1-s))} \int_{0}^{(1-s)/\cos(\varphi)} |r|^{-\alpha+1} f_1(r,\varphi)\,dr d\varphi +$$

$$+\int_{\arctg((1-t)/(1-s))}^{\arctg(-(1-t)/s)+\pi}\int_{0}^{(1-t)/\cos(\varphi-\pi/2)}|r|^{-\alpha+1}f_2(r,\varphi)\,dr\,d\varphi +$$

$$+\int_{\arctg((1-t)/(-s))+\pi}^{\arctg(t/s)+\pi}\int_{0}^{s/\cos(\varphi-\pi)}|r|^{-\alpha+1}f_3(r,\varphi)\,dr\,d\varphi +$$

$$+\int_{\arctg(t/s)+\pi}^{\arctg(-t/(1-s))+2\pi}\int_{0}^{t/\cos(\varphi-1.5\pi)}|r|^{-\alpha+1}f_4(r,\varphi)\,dr\,d\varphi\ ,$$

woraus man durch parameterabhängiges Differenzieren feststellen kann, daß die ersten partiellen Ableitungen stetig sind. Andererseits sieht man, daß die gemischten 2. partiellen Ableitungen an den Ecken des Quadrats singulär werden:

$$Tf(s,t) = \int_{t}^{t-1}\int_{s}^{s-1}\sqrt{\sigma^2+\sigma_1^2}^{\,-\alpha}f(s-\sigma,t-\sigma_1)\,d\sigma\,d\sigma_1$$

$$\sigma=s-x$$
$$\sigma_1=t-y$$

$$D_sD_tTf(s,t) = D_s\Big[\int_{t}^{t-1}\int_{s}^{s-1}\sqrt{\sigma^2+\sigma_1^2}^{\,-\alpha}D_tf(s-\sigma,t-\sigma_1)\,d\sigma\,d\sigma_1 +$$

$$+\int_{s}^{s-1}\sqrt{\sigma^2+(t-1)^2}^{\,-\alpha}f(s-\sigma,1)\,d\sigma - \int_{s}^{s-1}\sqrt{\sigma^2+t^2}^{\,-\alpha}f(s-\sigma,o)\,d\sigma\Big]$$

$$= \sqrt{(s-1)^2+(t-1)^2}^{\,-\alpha}f(1,1) - \sqrt{s^2+(t-1)^2}^{\,-\alpha}f(o,1) -$$

$$- \sqrt{(s-1)^2+t^2}^{\,-\alpha}f(1,o) + \sqrt{s^2+t^2}^{\,-\alpha}f(o,o) + \text{"glattere Terme"}.$$

Eine analoge Aussage erhält man für $D_tD_sTf(s,t)$.
In Abbildung 2 wird die Lösung eines solchen Eigenwertproblems graphisch dargestellt.

3.3.5. Normsingularität über einer Kugel

Benutzt man für den Spezialfall der Integration über Kreise

$$Tf(s,t) = \iint_{\sqrt{x^2+y^2}<1} \sqrt{(s-x)^2+(t-y)^2}^{-\alpha} f(x,y)dxdy, \quad \alpha\in(o,2)$$

dieselbe Transformation wie in 3.2.2., so ergibt sich

$$Tf(s,t) = \int_o^{2\pi} \int_o^{\sin(\varphi-B)/\sin(\varphi)} r^{1-\alpha} f(s-r\cos(\varphi),t-r\sin(\varphi))drd\varphi$$

und wegen der nicht auftretenden $(1/\sin(\varphi))^\gamma$, $(1/\cos(\varphi))^\gamma$-Terme, $\gamma\in(o,1)$, kann man stetige Differenzierbarkeit des Operators für beliebige $\alpha\in(o,2)$ zeigen.

3.3.6. Zusammenfassung

In diesem Kapitel zeigt sich deutlich, daß in mehreren Dimensionen keine allgemeinen Sätze gewonnen werden können. Vielmehr variieren die Resultate mit den verschiedenen Typen von Integrationsbereichen. Ecken in den Bereichen wirken sich auf das Differentiationsverhalten des Operators und damit der Lösung des Eigenwertproblems i.a. direkt aus. Ist dagegen der Bereich glatt berandet, wofür der Kreis als Beispiel verwendet wurde, bringt dies weniger Schwierigkeiten mit sich. In den Fällen quadratintegrierbarer Kerne bei glatt berandeten Integrationsbereichen ist die Lösung der angegebenen Beispiele mindestens einmal stetig differenzierbar. In den anderen Fällen muß man zudem nach der Art der Singularität und des Bereichs unterscheiden. Die noch nicht untersuchten Beispielklassen sind Spezialfälle der behandelten Typen und bereiten keine weiteren Schwierigkeiten.

4. KONVERGENZVERHALTEN, ALLGEMEINER FALL, MEHRFACHE EIGENWERTE

In diesem Kapitel soll die Kenntnis der Struktur der Lösung zur Bestimmung des qualitativen Konvergenzverhaltens bei der Quadraturformelmethode herangezogen werden. Im vorigen Abschnitt konnte gezeigt werden, daß die Lösung des Eigenwertproblems i.a. am Rand oder in den Ecken des Integrationsbereichs in ihren höheren Ableitungen Singularitäten aufweist. Dieser Glattheitsverlust wird sich sowohl bei der Konvergenz der Eigenwerte als auch der Eigenfunktionen des Ersatzproblems in einem Ordnungsverlust bemerkbar machen.

Den Quadraturformelmethoden aus Kapitel 2 kann man symbolisch den Näherungsoperator

$$T_n f(s) = \sum_{j=1}^{n} \omega_j \, k^*(s,t_j) \, f(t_j)$$

zuordnen. Dabei ist im Falle (mehrdimensionaler) Quadratur über $\overline{\Omega}$ $s,t_j \in \overline{\Omega}$ zu wählen. Im Falle verallgemeinerter Quadraturmethoden kann darüber hinaus die Abhängigkeit $\omega_j = \omega_j(s)$ bestehen.
All diesen Operatoren sind die Eigenschaften

$$\| T-T_n \|_{n\not\to\infty} o \quad \text{und}$$

$$\| (T-T_n)T_n \|_{n\to\infty} o \;, \; \{T_n\}_{n\in\mathbb{N}} \text{ kollektiv-kompakt}$$

in der zugrundeliegenden Banachraumnorm gemeinsam. Dabei wird die Nomenklatur von ANSELONE [1] übernommen.

4.1. Eigenwertkonvergenz

Das Konvergenzverhalten in sehr allgemeinen Situationen faßt man am besten zusammen in folgendem

SATZ 1: Für einen Banachraum $(X,\|\cdot\|)$ gilt:
Sei $\lambda\neq o$ Eigenwert von T mit algebraischer Vielfachheit m. Die m Näherungen an λ sind mit $\lambda_{n,i}$, i=1(1)m bezeichnet. Bildet man die gewichtete Mittelung $\hat{\lambda}_n := \sum_{i=1}^{m} \lambda_{n,i}/m$, so existiert ein c>o, c=c(λ,T), das von n unabhängig ist, so daß für hinreichen großes n

$$|\lambda-\hat{\lambda}_n| \leq c \sup_{\substack{x\in R(T) \\ \|x\|\leq 1}} \|(T-T_n)x\|$$

gilt. Dabei bezeichnet R(T) den verallgemeinerten Eigenraum von T.

Beweis: OSBORN [37] und ATKINSON [3]. □

Dabei wird in der angegebenen Arbeit von OSBORN eine sehr viel allgemeinere Situation zugelassen. Die Aussage ist also ein Spezialfall; sie gilt für komplexe, mehrfache Eigenwerte bei nicht notwendig symmetrischen Operatoren. Die Abschätzung kann auch durch

$$|\lambda-\hat{\lambda}_n| = O(\|(T-T_n)T_n\|)$$

ersetzt werden, was in späterem Zusammenhang für Konvergenzordnungen und Fehlerabschätzungen wichtig ist. Dies gilt ebenso für den Konvergenzsatz der Eigenfunktionen.

4.2. Eigenfunktionskonvergenz

Resultate, die von denselben Einflußgrößen abhängen, lassen sich für die zugehörigen Eigenfunktionen erzielen.

SATZ 2: Im selben Banachraum $(X,\|\cdot\|)$ seien jeweils λ_n Eigenwerte von T_n mit $\lim_{n\to\infty}\lambda_n=\lambda\in S(T)$ †). Die zugehörigen Eigenelemente $x_n\in R(T_n)$ sind normiert: $\|x_n\|=1$. Der Eigenwert sei vom Index $k\leq l$: $(\lambda_n-T_n)^k x_n=o$. Dann gilt für alle α, $1\leq k\leq\alpha\leq l$: Es existiert ein Eigenelement $x_1\in R(T)$ und $c_1>o$, $c_1=c_1(\lambda,T)$, das von n unabhängig ist, so daß für hinreichend großes n

$$(\lambda-T)^{\alpha}x_1 = o \quad \text{und}$$

$$\|x_1-x_n\| \leq c_1 \sup_{\substack{x\in R(T)\\ \|x\|\leq 1}} \|(T-T_n)x\|^{(\alpha-k+1)/l}$$

gilt.(Beweis: OSBORN [37])

Für einfache λ ergibt sich damit dieselbe Fehlerordnung wie bei der entsprechenden Eigenwertkonvergenz.
Der Fall von mehrfachen Eigenwerten hängt von denselben Einflußgrößen ab, ist vollständig geklärt und erbringt einen Ordnungsverlust.
Aus diesen Darstellungen wird deutlich, daß das Glattheitsverhalten der Lösung direkt das Konvergenzverhalten der Quadraturformelmethode beeinflußt. In einigen Fällen kann man durch eine spezielle Stützstellenwahl den Ordnungsverlust ausgleichen. Dies ist Gegenstand der Untersuchungen im nächsten Kapitel.

---

†) S(T) bezeichnet das Spektrum von T.

5. DISKRETISIERUNGSFRAGEN IN EINER UND MEHREREN DIMENSIONEN

Im letzten Abschnitt wurde nachgewiesen, daß die Konvergenz $\lambda_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \lambda$ und $\|x_1 - x_n\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ von speziellen Quadraturfehlern $\|(T-T_n)x\|$ abhängt. Die Glattheit der Eigenfunktionen hat damit Einfluß auf das Konvergenzverhalten, da eventuell nichtglatte Integranden auftreten.
In Kapitel 3 wurden die Differenzierbarkeitseigenschaften der Lösung des homogenen Problems ausführlich untersucht.
Wegen der Singularitäten, die im eindimensionalen Fall an den Enden des Integrationsintervalls auftreten können, fällt die Konvergenzordnung des Verfahrens in Abhängigkeit der Singularität des Kerns ab.
De HOOG/WEISS [29] und SCHNEIDER [42] beschäftigen sich mit solchen Quadraturfehlerordnungen.
Daß eine Häufung der Stützstellen zum Rand hin eine Verbesserung der Ordnungen erbringt, ist in der Quadraturtheorie bekannt.
RICE [38]schlägt zum ersten Mal eine "angepaßte" Häufung vor, die von SCHNEIDER [42] bei inhomogenen Integralgleichungsproblemen aufgegriffen und verfeinert wurde.
Die Stützstellen $\tau_i \in [a,b]$, $i=o(1)n$ sollten danach folgendermaßen gewählt werden:

$$\tau_i := a + (b-a)/2 \cdot (2i/n)^q, \quad o \leq i \leq [n/2]$$

$$\tau_i := a + b - \tau_{n-i}, \quad [n/2] \leq i \leq n$$

mit $q = m/\alpha$; m gibt dabei den Grad der Quadraturformel an, α den Grad der Singularität des Kerns $|s-t|^{-\alpha}$, $\alpha \in (o,1)$.
Der Fall des logarithmisch-singulären Kerns paßt sich als Grenzfall in die Betrachtungen ein.
Die Anpassung der Häufung erfolgt also in Anlehnung an Singularität und Formel.

Man wird aus Stabilitätsgründen jedoch versuchen, q so klein wie möglich zu halten. SCHNEIDER [42] zeigt in diesem Zusammenhang, daß bei der Simpsonregel die Wahl $\hat{q}:=(4+\alpha)/2\alpha<q$ genügt, um den gewünschten Effekt zu erzielen.
Mit der angegebenen Wahl von τ_i und q werden die üblichen Quadraturfehlerordnungen erreicht, wie sie im Fall stetiger Integraloperatoren mit hinreichend glatter Lösung bekannt sind. SCHNEIDER [42] zeigt zudem, daß oben angegebene Häufung das übliche Ordnungsverhalten nicht stört, falls die Lösung "wider Erwarten" glatt ist.
Insbesondere kann man in den Fällen der mehrdimensionalen modifizierten Quadraturformelmethode und in den Beispielen, bei denen die Lösung in ihren höheren Ableitungen Eckensingularitäten aufweist, dieselbe "zu starke Häufung" verwenden, um das Ordnungsverhalten zu verbessern. Genauere Aussagen kann man in diesem Mehrfach-Approximationsschema ohnehin nicht treffen.
Offen sind schließlich noch Diskretisierungsfragen für die Beispiele 2.1.5. und 2.1.6.. Hier hat der Operator T die Gestalt

$$Tf(s) = \int_{\Omega} |s_1-x_1|^{\alpha_1-1}\cdot\ldots\cdot|s_n-x_n|^{\alpha_n-1}k^*(s,x)f(x)dx,$$

$\alpha_i\in(o,1)$, i=1(1)n.Dabei soll $\sigma(s,x)=|s_1-x_1|^{\alpha_1-1}\cdot\ldots\cdot|s_n-x_n|^{\alpha_n-1}$ abgekürzt werden, und für den Integrationsbereich gilt: $\Omega=I_1\times\ldots\times I_n$ mit offenen Intervallen I_i. Das zugehörige Eigenwertproblem wird dann mit verallgemeinerten Produktformeln†) behandelt.
Wählt man deshalb n Quadraturformeln $\tilde{Q}^{x_i}_{n_i}$, so daß für ein offenes Intervall I_i

$$\int_{I_i} |s_i-x_i|^{\alpha_i-1}k^*(s_i,x_i)f(x_i)dx_i - \tilde{Q}^{x_i}_{n_i}(k^*f) = O(\frac{1}{n_i}^{p_i}),\ i=1(1)n,$$

gilt-z.B. die eingangs besprochenen verallgemeinerten Qua-

†) Iterierte eindimensionale Formeln

draturformeln zur Singularität $|s_i-x_i|^{-\alpha_i}$ mit den Ordnungen $p_i=1+\alpha_i$ für äquidistante Gitter, so ergibt sich für n=2 für den Kubaturfehler:

$$\int_{\Omega} \sigma(s,x)k^*(s,x)f(x)dx - \tilde{Q}^{x_1 x x}_{n_1 x n_2}(k^*f)$$

$$\overset{\dagger)}{=} \int_{I_1} \sigma_1(s_1,x_1)\Big[\int_{I_2} \sigma_2(s_2,x_2)k^*(s_1,s_2;x_1,x_2)f(x_1,x_2)dx_2 -$$

$$\overset{\dagger\dagger)}{-}\sum_{j=1}^{n_2} \omega_j(s_2)k^*(s_1,s_2;x_1,x_2^j)f(x_1,x_2^j)\Big]dx_1 +$$

$$+\sum_{j=1}^{n_2} \omega_j(s_2)\Big[\int_{I_1} \sigma_1(s_1,x_1)k^*(s_1,s_2;x_1,x_2^j)f(x_1,x_2^j)dx_1 -$$

$$-\sum_{i=1}^{n_1} \omega_i(s_1)k^*(s_1,s_2;x_1^i,x_2^j)f(x_1^i,x_2^j)\Big] = O(\tfrac{1}{n_1}^{p_1})+O(\tfrac{1}{n_2}^{p_2})$$

$$= O(\Pi_{n_1,n_2}^{\min(p_1,p_2)})$$

wobei $\lim_{n_1,n_2\to\infty} \Pi_{n_1,n_2} = o$; d.h. Π_{n_1,n_2} ist dabei ein Maß für die Größe der Bereichsunterteilungen, z.B. der Duchmesser der Teilgebiete.
Wählt man für Ω einen rechteckigen Integrationsbereich, und ist die Lösung am Rand nicht glatt, so wird der Kubaturfehler durch zwei Quadraturfehler beeinflußt, bei denen der Integrand an den Intervallenden nicht glatt ist. Damit wird unmittelbar klar, daß eine Stützstellenhäufung

---

†) $\sigma_i(s_i,x_i)=|s_i-x_i|^{-\alpha}$

††) Der hochgestellte Index gibt an, auf welche Variable die Quadraturformel angewendet wird.

$$(\sigma_i,\tau_j) := \begin{cases} (a+\frac{b-a}{2}(\frac{2i}{n})^{q_1}, c+\frac{d-c}{2}(\frac{2j}{n})^{q_2}), & o\leq i\leq[n/2]\wedge o\leq j\leq[n/2] \\ (a+\frac{b-a}{2}(\frac{2i}{n})^{q_1}, c+d-\tau_{n-j}), & o\leq i\leq[n/2]\wedge[n/2]\leq j\leq n \\ (a+b-\sigma_{n-i}, c+\frac{d-c}{2}(\frac{2j}{n})^{q_2}), & [n/2]\leq i\leq n\wedge o\leq j\leq[n/2] \\ (a+b-\sigma_{n-i}, c+d-\tau_{n-j}), & [n/2]\leq i\leq n\wedge[n/2]\leq j\leq n \end{cases}$$

wiederum den ordnungserhaltenden Effekt bewirkt, falls $I_1=(a,b)$ und $I_2=(c,d)$ und q_1 und q_2 als Exponenten der jeweiligen eindimensionalen Anpassungen gewählt sind.
In kanonischer Weise kann dieses Resultat auf höhere Dimensionen ausgedehnt werden.
Damit läßt sich der numerisch ungünstigste Fall des Integralgleichungseigenwertproblems, dessen Lösung auf dem gesamten Rand des Rechteckgebietes nicht glatt verläuft, durch verallgemeinerte Produktformeln vollständig auf den eindimensionalen Fall zurückführen. Auch die Frage der Stützstellenwahl ist die direkte Verallgemeinerung auf den mehrdimensionalen Fall.
Sonderfälle stellen spezielle periodische Kerne $k(s,t)=\sigma(|s-t|)k^*(s,t)$ und auf den Rändern glatte Kerne $k(s,t)=|s-t|^{\alpha-1}\exp(-1/[s^2(1-s)^2])$ über $\Omega=(o,1)$ dar. (Vgl. BECHLARS [11]u. 2.1.9.)
In solchen Fällen ist es möglich, theoretisch (höhere) Glattheit der Lösung zu beweisen. Im letzten Fall ist die Glattheit des Exponentialanteils an den Ecken bzw. am Rand für die Glattheit der Lösung verantwortlich.
Muß man dagegen Quadraturformeln in mehreren Dimensionen benutzen, die nicht iterierte eindimensionale Varianten sind, so sind Aussagen über eine geeignete Stützstellenwahl kaum möglich.

6. FEHLERABSCHÄTZUNGEN IN EINER UND MEHREREN DIMENSIONEN FÜR DEN FALL NORMALER BZW. HERMITESCHER OPERATOREN

Schwerpunkt der Arbeit ist es, unter bestimmten Voraussetzungen Fehlerabschätzungen für die Eigenwerte und Eigenfunktionen herzuleiten. Für die Eigenwerte existieren unter der Bedingung normaler Integraloperatoren mit stetigen Kernen in einer Dimension berechenbare Schranken bei Anwendung der Nyström-Methode.(BRAKHAGE [13]). Für die Eigenfunktionen existieren solche Schranken bei der Quadraturformelmethode auch bei stetigen Integraloperatoren nicht. HÄMMERLIN [28] gibt Eigenfunktionsschranken für den stetigen Fall hermitescher Integraloperatoren bei der Behandlung durch Ersatzkernverfahren an. Hier sollen im Falle normaler bzw. hermitescher Integralgleichungseigenwertprobleme mit stetigen oder schwachsingulären Kernen in einer oder mehreren Raumdimensionen neben Konvergenzordnungsbetrachtungen Fehlerabschätzungen hergeleitet werden. Als numerisches Verfahren wird die Nyström-Methode gewählt.

6.1. Fehlerabschätzungen für die Eigenwerte

Es gilt der Einschließungssatz für normale Operatoren, der den "Abstand" eines berechneten Eigenwertes λ_n "zum Spektrum" in Termen des "Residuums" $\|Tx-\lambda_n x\|$ mißt. Mit einer speziellen Wahl von x kann folgender Satz gezeigt werden:

SATZ 1: Für einen Hilbertraum $(X,\|\cdot\|)$ und einen kompakten, normalen, linearen Operator $T: X \to X$ und den beschränkten, linearen Operator $T_n: X \to X$ gilt:

$$\min_{0\neq\lambda\in S(T)} |\lambda_n-\lambda| \leq \frac{\|T(T-T_n)T_n\|}{|\lambda_n|^2 - \|(T-T_n)T_n\|} ,$$

falls $|\lambda_n|^2 > \|(T-T_n)T_n\|$.

Dabei bezeichnet $S(T)$ wieder das Spektrum von T.
(Häufig wird man $X:=L_2(\Omega)$ $\|\cdot\|:=\|\cdot\|_2$ verwenden; es ist dann $s,t_j \in \overline{\Omega}$ für $j=1(1)n$)

Beweis: Mit y_n soll eine berechnete Eigenfunktion zum Näherungsoperator bezeichnet werden: $T_n y_n = \lambda_n y_n$.

Nach dem Einschließungssatz für normale Operatoren gilt, (vgl. etwa BAKER [7]):

$$\min_{0\neq\lambda\in S(T)} |\lambda_n-\lambda| \leq \frac{\|Tx-\lambda_n x\|}{\|x\|} , \text{ für alle } x \neq 0 .$$

Wählt man $x:=x_n:=TT_n y_n$, dann gilt:

$x_n=TT_n y_n - T_n T_n y_n + \lambda_n^2 y_n$ und mit $|\lambda_n|^2 > \|(T-T_n)T_n\|$:

$\|x_n\| \geq (|\lambda_n|^2 - \|(T-T_n)T_n\|)\,\|y_n\| > 0$.

Die rechte Seite der Ungleichung nimmt damit folgende Gestalt an:

$$\frac{\|Tx_n-\lambda_n x_n\|}{\|x_n\|} \leq \frac{\|TTT_n y_n - TT_n T_n y_n\|}{(|\lambda_n|^2 - \|(T-T_n)T_n\|)\,\|y_n\|} \leq \frac{\|T(T-T_n)T_n\|}{|\lambda_n|^2 - \|(T-T_n)T_n\|} ,$$

falls der Nenner positiv ist. ∎

Bemerkungen:

1.) Definiert man im Beweis $x:=x_n:=TT_n^p y_n$, so ergeben sich qualitativ gleichwertige Aussagen.

2.) In konkreten schwachsingulären Fällen ergeben sich hieraus

berechenbare Größen c_1 und c_2 und Quadraturfehler δ_1, δ_2, so daß

$$\min_{\lambda \in S(T)} |\lambda_n - \lambda| \leq \frac{c_1 \delta_1}{\sqrt{c_2 - \delta_2}}$$

ähnlich wie in der Brakhage-Abschätzung gilt. Das Problem reduziert sich also auf die Bestimmung spezieller Quadraturfehler.

3.) Für mehrdimensionale stetige Eigenwertprobleme und glatte Kerne erhält man Fehlerordnungen und Fehlerabschätzungen, die einfache Verallgemeinerungen der Brakhage-Schranken darstellen (BRAKHAGE [13]).
Dabei geht gleichmäßige Beschränktheit von

$\|k(s,\cdot)k(\cdot,t)\|_{W_\infty^m(\Omega)}$ mit formelabhängigem m wesentlich ein.

4.) Für schwachsinguläre Probleme und Kerne in Produktform $k=\sigma k^*$ gilt unter der Einschränkung

$$\sup_{s \in \bar{\Omega}} \|k^*(s,\cdot)x(\cdot)\|_{W_\infty^{n_2+1}(\Omega)} < \infty$$

$o(h^{n_2})$-Konvergenzordnung, wenn x die zum Eigenwert λ gehörige Eigenfunktion ist, k^* den glatten Anteil des Kerns und n_2 die Approximationsordnung bezeichnen. Bei der eindimensionalen, algebraischen Kernsingularität mit Exponent $\alpha-1$ werden Ordnungen $\alpha+1$ erreicht.

5.) Bezüglich Superkonvergenzphänomenen bei der verallgemeinerten Quadraturformelmethode (Produktintegration), siehe SPENCE [52], SPENCE/THOMAS [51]. Bekannte Resultate bei der numerischen Behandlung inhomogener Probleme mittels Galerkinverfahren und deren Varianten werden für den Spezialfall der Produktintegration für das Eigenwertproblem formuliert.

Im Numerikteil wird die praktische Anwendbarkeit dieser Schranken untersucht.
Liegt eine Schranke für die Eigenwerte vor, so können auf recht einfache Weise daraus Abschätzungen für die Eigenfunktionen gewonnen werden.
Wegen der Voraussetzungen des Einschließungssatzes ist die Einschränkung auf normale Operatoren wesentlich. Asymptotische Konvergenzordnungsaussagen der gleichen Qualität erreicht man jedoch auch im allgemeinen, nicht notwendig normalen Fall; BAKER [7] beweist, daß $O(\|(T-T_n)T_n\|)$ Konvergenzordnungseinflußgröße ist.

6.2. Fehlerabschätzungen für die Eigenfunktionen

Für die Eigenfunktionen sollen lokale und globale Abschätzungen hergeleitet werden. Die Abschätzungen für die zugehörigen Eigenwerte sind wesentliche Einflußgrößen in diesen Eigenfunktionsschranken. Dabei ist es unerheblich, ob das vorgelegte Problem stetig oder schwachsingulär ist, und ob in einer oder in mehreren Dimensionen gerechnet wird. Hat man einmal Schranken für die berechneten Eigenwerte gefunden, so lassen sich aus diesen in relativ einfacher Weise Schranken für die Eigenfunktionen herleiten. Für den Beweisgang werden spektraltheoretische Ergebnisse benötigt, die nur für Hermitesche Operatoren Gültigkeit haben, was eine wesentliche Einschränkung bedeutet. Das Ergebnis ist auch für den stetigen Fall bemerkenswert, da solche Schranken für Quadraturmethoden nicht bekannt sind. In diesen Fällen kann man die gut handhabbaren Brakhage-Schranken für die Eigenwerte benutzen. Für Ersatzkernverfahren geht HÄMMERLIN [28] von einem ähnlichen Ansatz aus.

Sei also $Tf(s) = \int_{\Omega} k(s,t)f(t)dt$ ein kompakter, linearer, beschränkter und Hermitescher Operator mit L_1-Kern k auf einem Hilbertraum. Die schwachsinguläre, mehrdimensionale Problemstellung ist somit eingeschlossen.

Wählt man $(L_2(\Omega), \|\cdot\|_2)$, so gilt für das Skalarprodukt

$$(u,v) = \int_{\Omega} u(s)\overline{v}(s)ds, \quad \|u\| := |\sqrt{(u,u)}| \ .$$

$T_n x_n = \lambda_n x_n$ bezeichnet die diskrete Eigenwertaufgabe, abkür-

zend sei $T_n^* := (T-T_n)T_n$ gesetzt.

Einschränkend muß man einfache Eigenwerte λ_n und λ voraussetzen. Dies wird aus dem Beweisgang ersichtlich.
Die Lösung von $Tx = \lambda x$ sei normiert: $\|x\|=1$.

Mit diesen Bezeichnungen ergibt einfache Rechnung:

$$\lambda x_n = Tx_n - 1/\lambda_n^2 \, (T-T_n)T_nT_nx_n - (\lambda_n-\lambda)x_n$$

und $$\lambda(x-x_n) = T(x-x_n) + 1/\lambda_n \, T_n^* x_n + (\lambda_n-\lambda)x_n$$

und $$(T-\lambda I)(x-x_n) = -1/\lambda_n \, T_n^* x_n - (\lambda_n-\lambda)x_n \qquad (1)$$

Unter Einführung der Resolvente bei Hermiteschen Operatoren kann folgender Satz bewiesen werden:

SATZ 2: In Übereinstimmung mit den erwähnten Bezeichnungen erhält man eine erste Abschätzung für die Eigenfunktionen:

$$\|x-x_n\| \le \frac{1}{d} \left(\frac{p}{|\lambda_n|^2} + |\lambda-\lambda_n|\right) \|x_n\| \, ,$$

wenn man $p = \|T_n^* T_n\|$ abkürzt und d eine Größe bezeichnet, die den Abstand vom nächstbenachbarten Eigenwert mißt bzw. abschätzt.

Beweis: Wegen der Eigenschaften des Hermiteschen Operators T in einem Hilbertraum ist durch die Forderungen

$$Rx := o \, , \; x \in R(T)$$

$$R(T-\lambda I)u := u-(u,x)x \, , \; u \in L_2(\Omega)$$

eine Resolvente eindeutig bestimmt, für die

$$\|Ru\| \le \|u\|/d$$

gilt, wenn $S(T) \cap [\lambda-d,\lambda+d] = \{\lambda\}$. Dabei ist S(T) das Spektrum des Operators T.

Wendet man R von links auf (1) an, so ergibt sich:

$$R(T-\lambda I)(x-x_n) = (x-x_n)-(x-x_n,x)x = x-x_n-x+(x_n,x)x$$
$$= x-x_n, \text{ falls man } (x_n,x)=1 \text{ fordert.}$$

Unter welchen Umständen eine solche Normierung möglich ist, wird später beschrieben.
Damit besteht die Gleichung:

$$x-x_n = -1/\lambda_n \; RT_n^*x_n+(\lambda-\lambda_n)Rx_n \; .$$

Offensichtlich gilt mit den Eigenschaften der Resolvente

$$\|\frac{1}{\lambda_n}RT_n^*x_n\| \leq \frac{1}{|\lambda_n|^2}\,\frac{1}{d}\,\frac{\|T_n^*T_nx_n\|}{\|x_n\|}\,\|x_n\| \leq \frac{p}{d|\lambda_n|^2}\,\|x_n\|$$

Dabei bezeichnet p den Quadraturfehler, der schon bei der Fehlerabschätzung für die Eigenwerte ausschlaggebend war; man erhält dann:

$$\|x-x_n\| \leq \frac{1}{d}\,\left(\frac{p}{|\lambda_n|^2}+|\lambda-\lambda_n|\right)\,\|x_n\| \; , \qquad (2)$$

was den Satz beweist. □

Damit hängt die Fehlerabschätzung von den bekannten Einflußgrößen ab.
Abschätzung (2) muß allerdings noch durch eine Reihe von Umformungen in praktikablere Form gebracht werden.

Elimination von $\|x_n\|$ ergibt:

SATZ 3: $$\|x-x_n\| \leq \frac{1/d\;(p/|\lambda_n|^2+|\lambda-\lambda_n|)}{\sqrt{1-(p/|\lambda_n|^2+|\lambda-\lambda_n|)^2/d^2}} \; , \qquad (3)$$

falls $(p/|\lambda_n|^2+|\lambda-\lambda_n|)/d < 1$.

Beweis: $\|x_n\|^2 = (x_n,x_n) = 1+(x-x_n,x-x_n) = 1+\|x-x_n\|^2$,

woraus $\|x-x_n\|^2 \leq \frac{1}{d^2}\,\left(\frac{p}{|\lambda_n|^2}+|\lambda-\lambda_n|\right)^2\,[1+\|x-x_n\|^2]$ folgt.

Falls nur $(p/|\lambda_n|^2+|\lambda-\lambda_n|)/d < 1$ gilt, folgt die Behauptung des Satzes. ∎

Eine zweite Darstellung bekommt man unter weiterer Ausnutzung der Eigenschaften der Resolvente.

SATZ 4:
$$\|x-x_n\| \leq \frac{p/(d\cdot|\lambda_n|^2)}{\left(\left(1-\frac{|\lambda-\lambda_n|}{d}\right)^2-\frac{p^2}{d^2|\lambda_n|^4}\right)^{1/2}}, \qquad (4)$$

falls $(p/|\lambda_n|^2+|\lambda-\lambda_n|)/d < 1$.

Beweis: Wegen $Rx=o$ ist $Rx_n=R(x_n-x)$; wegen

$$x-x_n = -1/\lambda_n\, RT_n^*x_n + (\lambda-\lambda_n)Rx_n$$

kann man also

$$x-x_n = -1/\lambda_n\, RT_n^*x_n - (\lambda-\lambda_n)R(x-x_n) \text{ und}$$
$$\|x-x_n\| \leq \frac{p}{d|\lambda_n|^2}\,\|x_n\| + \frac{|\lambda-\lambda_n|}{d}\,\|x-x_n\| \quad \text{schließen,}$$

woraus $(1-|\lambda-\lambda_n|/d)^2\,\|x-x_n\|^2 \leq \frac{p^2}{d^2|\lambda_n|^4}\,\|x_n\|^2 =$

$$\frac{p^2}{d^2|\lambda_n|^4}\,[1+\|x-x_n\|^2] \text{ folgt, falls } |\lambda-\lambda_n|/d \leq 1 \text{ gilt.}$$

Daraus folgt die Behauptung des Satzes unmittelbar. ∎

Für die Gültigkeit der Abschätzungen war aber noch die Normierung $\|x\|=(x,x_n)=1$ vorausgesetzt. Meist will man jedoch Abschätzungen für die Normierungen $\|x\|=\|x_n\|=1$ haben. Dazu definiert man:

$\hat{x}_n := x_n/\|x_n\|$; $\|\hat{x}_n\|=1$. Dann gilt:

$\hat{x}_n = x_n + x_n\,(1-\|x_n\|)/\|x_n\|$ also

$$\hat{x}_n - x = x_n - x + x_n\,(1-\|x_n\|)/\|x_n\| \quad \text{und}$$

$$\|\hat{x}_n - x\| \leq \|x_n - x\| + |1-\|x_n\|\,| \ .$$

Mit $\|x_n\|^2 = 1+\|x-x_n\|^2$ gilt also

$$\|\hat{x}_n - x\| \leq \|x_n - x\| + \sqrt{1+\|x-x_n\|^2} - 1 \ , \text{ da } \|x_n\| \geq 1 \ .$$

Damit kann man die Abschätzungen für die geeignete,normierte Eigenfunktion auf den eingangs besprochenen Fall zurückführen.

Schließlich ist noch unklar, ob eine Normierung $(x_n,x)=1$ möglich ist.

Nur wenn $(x_n,x)=o$ ist dies nicht möglich; das würde aber bedeuten, daß

$$R(T-\lambda I)(x-x_n) = (x-x_n)-x = -x_n \quad \text{also}$$

$$x_n = 1/\lambda_n \; RT_n^* x_n + (\lambda_n - \lambda)Rx_n \quad \text{gilt.}$$

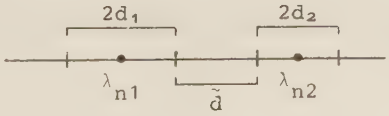
Dann ist

$$\|x_n\| \leq \|x_n\|\,(p/|\lambda_n|^2 + |\lambda-\lambda_n|)/d \ .$$

Diese Abschätzung ist aber nur für $(p/|\lambda_n|^2+|\lambda-\lambda_n|)/d \geq 1$ möglich; dann gelten die Fehlerabschätzungen aber ohnehin nicht.

Will man die Abschätzungen anwenden, müssen p und d berechnet werden.
p ist ein spezieller Quadraturfehler, wie er auch bei der Eigenwertabschätzung auftaucht, und bestimmt damit die Ordnung.
d berechnet sich als Abstand eines einfachen Eigenwertes λ vom nächst benachbarten. Dabei hilft eine einfache geometrische Betrachtung:

Abbildung 4:



Sei $|\lambda_1-\lambda_{n1}| \leq d_1$ und $|\lambda_2-\lambda_{n2}| \leq d_2$; seien λ_{n1} und λ_{n2} um mindestens $d^*=d_1+d_2$ voneinander getrennt, so gilt:

$$|\lambda_1-\lambda_2| \geq |\lambda_{n1}-\lambda_{n2}|-|d_1+d_2| =:\tilde{d} \geq o .$$

$\tilde{d}$ schätzt d nach unten ab.

Gelegentlich ist man an einer lokalen Abschätzung für

$$|x(t_i)-x_n(t_i)|, \quad i=1(1)n \text{ interessiert,}$$

z.B. falls man die numerische Konvergenzordnung an Beispielen testen will, deren exakte Lösung man nicht kennt.
Solche Abschätzungen hängen wiederum von denselben Einflußgrößen ab:

SATZ 5: $$|x-x_n| \leq \frac{1}{|\lambda_n|}\{(\|x-x_n\|+1)\|T\|+\frac{1}{|\lambda_n|}\|T_n^*\|(\sqrt{1+\|x-x_n\|^2})\}$$

Beweis: Mit $\lambda(x-x_n) = T(x-x_n) + 1/\lambda_n\, T_n^* x_n + (\lambda_n-\lambda)x_n$

und $|x_n| \leq |x|+|x-x_n|$ sowie $|\lambda|\cdot|x| \leq \|x\|\cdot\|T\|$ gilt:

$$|\lambda|\cdot|x-x_n| \leq \|T\|\cdot\|x-x_n\|+\frac{1}{|\lambda_n|}\|T_n^*\| \; \|x_n\|+|\lambda-\lambda_n|(|x|+|x-x_n|).$$

Dann folgt weiter:

$$|x-x_n| \leq \frac{1}{|\lambda|-|\lambda-\lambda_n|}\{(\|x-x_n\|+\frac{|\lambda-\lambda_n|}{|\lambda|})\|T\|+\frac{1}{|\lambda_n|}\|T_n^*\| \; \|x_n\|\} ;$$

und mit $\|x_n\|^2 = 1+\|x-x_n\|^2$ kann man weiter umformen:

$$|x-x_n| \leq \frac{1}{|\lambda_n|-2|\lambda-\lambda_n|}\{(\|x-x_n\|+1)\|T\|+\frac{1}{|\lambda_n|}\|T_n^*\|(\sqrt{1+\|x-x_n\|^2})\},$$

falls $|\lambda| > |\lambda-\lambda_n|$, $|\lambda_n| > 2|\lambda-\lambda_n|$, was den Satz beweist.

7. NUMERISCHE BEISPIELE

In diesem Kapitel werden die verschiedenen Testbeispiele mit den eingangs besprochenen numerischen Verfahren behandelt. Die Resultate umfassen Konvergenzordnungen und Fehlerabschätzungen. Alle Konvergenzordnungen müssen ohne Kenntnis der Lösung getestet werden. Hierzu soll zunächst eine Verfahrensmöglichkeit beschrieben werden.†)

7.1. Konvergenzordnungstests

Gesucht ist der Wert des Exponenten p in folgendem Ansatz:

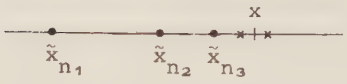
$$\frac{\tilde{x}_{n_1}-\tilde{x}_{n_2}}{\tilde{x}_{n_2}-\tilde{x}_{n_3}} = \frac{(\tilde{x}_{n_1}-x)+(x-\tilde{x}_{n_2})}{(\tilde{x}_{n_2}-x)+(x-\tilde{x}_{n_3})} = \frac{\pm e_{n_1} \mp e_{n_2}}{\pm e_{n_2} \mp e_{n_3}} = \frac{\pm (1/n_1)^p \mp (1/n_2)^p}{\pm (1/n_2)^p \mp (1/n_3)^p}.$$

Asymptotisch liefert diese Identität als Lösung die Konvergenzordnung p des numerischen Verfahrens. Dabei bezeichnen $\tilde{x}_{n_1}, \tilde{x}_{n_2}$ und $\tilde{x}_{n_3}$ Näherungswerte für x mit diskretisierungsabhängigen Indizierungen n_1, n_2, n_3 und $e_{n_1}, e_{n_2}, e_{n_3}$ die entsprechenden Fehler. Auf die Vorzeichen der Fehler bzw. auf die Lage von drei Näherungswerten bezüglich der Lösung x kann man unter der Voraussetzung der Konvergenz des Verfahrens durch die Lage von vier Näherungswerten zueinander schließen. Dies sieht man durch folgende Fallunterscheidung ein:

---

†) Eigenwertlöser wurden aus "Large Systems Numerals, Numerical Analysis Program Library", "International Mathematical and Statistical Libraries" (IMSL) und "Eigensystem Package" (EISPACK) des Argonne National Laboratory in Argonne, Illinois, U.S.A. entnommen.

1.) Alle vier Näherungswerte liegen monoton zueinander



Beide Konstellationen × für $\tilde{x}_{n_4}$ sind denkbar.

Abbildung 5

2.) Drei Näherungswerte liegen monoton zueinander

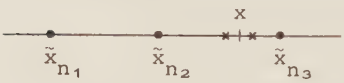


Abbildung 6

Auch im folgenden soll mit × eine mögliche Lage von $\tilde{x}_{n_4}$ angedeutet werden. Dann liegt die Lösung in diesem Fall zwischen dem 2. und 3. Näherungswert (s. Abbildung).

3.) Alternierender Fall

Abbildung 7

Dann liegt die Lösung zwischen dem 2. und 3. Näherungswert (s. Abbildung).

Die verbleibenden Fälle sind Spezialfälle der skizzierten. Aus diesen Überlegungen ergeben sich die Vorzeichen der Fehler $e_{n_1}, e_{n_2}, e_{n_3}$, und damit kann man jetzt die Ansatzgleichung mit einem Nullstellenverfahren nach p auflösen.

7.2. Eindimensionale Fälle und Konvergenzordnungen

Auf den folgenden Seiten wird in den eindimensionalen Fällen von schwachsingulären Integraloperatoren eine ausführliche Beispielrechnung vorgestellt.

In den nachstehenden Tabellen steht "ST" für die verallgemeinerte Trapezregel, "SI" für die verallgemeinerte Simpsonregel. α gibt die Stärke der Singularität an, $k^*(s,t)$ den stetigen Produktanteil des Kernes. Über q wird angegeben, ob für die Diskretisierung äquidistante oder zum Rand hin gehäufte Stützstellen verwendet werden; q=1 bezeichnet den Spezialfall des gleichabständigen Gitters. "Punktweise" bedeutet bei den Konvergenzordnungen der Eigenfunktionen, daß das Ordnungsverhalten an den Stützstellen mangels Kenntnis der Lösung getestet worden ist.

Beispielrechnung:

$$Tx = \lambda x,\ T_n x_n = \lambda_n x_n,\ \|x_n\|_2 = 1.$$

$$k(s,t) := \begin{cases} |s-t|^{\alpha-1}\, k^*(s,t), & 0<\alpha<1 \\ \ln|s-t|\, k^*(s,t), & \alpha=1 \end{cases}$$

$$I = [a,b]$$

$$\text{Knoten: } \tau_i := \begin{cases} a+(b-a)/2\cdot(2i/n)^q, & 0\le i\le [n/2] \\ a+b-\tau_{n-i}, & [n/2]\le i\le n \end{cases}$$

Beispiel-Nr./ Formel		α	$k^*(s,t)$	q	Konvergenzordnungen, n=97	
					Eigenwerte	Eigenfunktionen "Punktweise"
ST	1	o.9	1	1	1.8o	1.79
	2	o.8	1	1	1.74	1.73
	3	o.7	1	1	1.69	1.67
	4	o.6	1	1	1.62	1.6o
	5	o.5	2	1	1.56	1.52
	6	o.3	1	1	1.41	1.37
	7	o.2	1	1	1.32	1.28
SI	8	o.9	1	1	1.89	1.89
	9	o.8	1	1	1.79	1.79
	1o	o.7	1	1	1.69	1.69
	11	o.6	1	1	1.59	1.59
	12	o.5	2	1	1.5o	1.5o
	13	o.3	1	1	1.31	1.32
	14	o.2	1	1	1.21	1.21
ST	15	o.9	1	$2/\alpha$	1.99	1.99
	16	o.8	1	$2/\alpha$	1.99	1.99
	17	o.7	1	$2/\alpha$	1.97	1.97
	18	o.6	1	$2/\alpha$	1.95	1.95
	19	o.5	2	$2/\alpha$	1.92	1.91
	2o	o.3	1	$2/\alpha$	1.8o	1.73
	21	o.2	1	$2/\alpha$	1.66	1.44
SI	22	o.9	1	$(4+\alpha)/2/\alpha$	4.oo	3.98
	23	o.8	1	$(4+\alpha)/2/\alpha$	4.o1	3.98
	24	o.7	1	$(4+\alpha)/2/\alpha$	4.o3	4.15
	25	o.6	1	$(4+\alpha)/2/\alpha$	4.o4	4.2o
	26	o.3	1	$(4+\alpha)/2/\alpha$	4.o1	3.25
	27	o.2	1	$(4+\alpha)/2/\alpha$	1.89	1.69
ST	28	o.5	$\|s-t\|^{0.5}$	1	o.97	o.94
	29	o.5	$\|s-t\|^{0.5}$	$2/\alpha$	o.97	o.82
	3o	o.5	$\|s-t\|^{2.5}$	1	2.oo	1.99
	31	o.5	$\|s-t\|^{2.5}$	$2/\alpha$	1.99	1.97
SI	32	o.5	$\|s-t\|^{0.5}$	1	o.99	o.97
	33	o.5	$\|s-t\|^{0.5}$	$1/\alpha$	1.oo	o.92
ST	34	1.o	1	1	1.98	1.68
	35	1.o	1	$2/\alpha$	1.96	1.95
SI	36	1.o	1	1	2.48	1.29
	37	1.o	1	$(4+\alpha)/2/\alpha$	4.o5	4.o6
ST	38	o.8	s+2	1	1.72	1.67
	39	o.8	s+2	$2/\alpha$	1.99	1.98
	4o	o.54	$\|\sin 2t\| \cdot (s+2)$	1	1.69	1.62
	41	o.54	$\|\sin 2t\| \cdot (s+2)$	$2/\alpha$	1.9o	1.68
	42	o.56	t^2	1	1.37	1.63
	43	o.56	t^2	$2/\alpha$	1.96	1.88
	44	o.6	$\sin(st+2t)$	1	1.69	1.77

Beispiel-Nr./ Formel	α	$k^*(s,t)$	q	Konvergenzordnungen, n=97	
				Eigenwerte	Eigenfunktionen "Punktweise"
ST 45	o.6	sin(st+2t)	2/α	2.19	1.65
46	o.8	s+2	1	1.72	1.67
47	o.8	s+2	2/α	1.99	1.98
48	o.52	sin(st+2t)· e**t^2	1	1.43	1.58
49	o.52	sin(st+2t)· e**t^2	2/α	1.92	1.78
5o	o.54	t^2	1	1.37	1.62
51	o.54	t^2	2/α	1.96	1.88
52	o.56	s+2	1	1.58	1.57
53	o.56	s+2	2/α	1.98	1.75
SI 54	o.56	s+2	1	1.56	1.58
55	o.56	s+2	(4+α)/2/α	4.13	4.23
56	o.8	s+2	1	1.8o	1.81
57	o.8	s+2	(4+α)/2/α	4.o5	4.o7
ST 58	$1/\sqrt{1-s^2t^2}$	s/arcsin(s)	1	9999	9999
SI 59	o.6	sin(st+2t)	1	1.59	1.82
6o	o.6	sin(st+2t)	(4+α)/2/α	3.52	3.71
61	o.52	sin(st+2t)· e**t^2	1	1.66	1.59
62	o.52	sin(st+2t)· e**t^2	(4+α)/2/α	3.35	3.84
ST 63	o.54	|sin2t|(s+2)	1	1.69	1.62
64	o.54	|sin2t|(s+2)	2/α	1.9o	1.68
SI 65	o.56	t^2	1	1.68	1.62
66	o.56	t^2	(4+α)/2/α	5.16	3.88
67	o.54	|sin2t|(s+2)	1	2.17	1.51
68	o.54	|sin2t|(s+2)	(4+α)/2/α	4.86	3.51
69	o.54	t^2	1	1.67	1.61
7o	o.54	t^2	(4+α)/2/α	5.o7	3.87

Tabelle 1: Eindimensionale, schwachsinguläre Eigenwertprobleme; Konvergenzordnungen bei verallgemeinerten Quadraturverfahren und unterschiedlicher Stützstellenwahl.

Die ersten 7 Beispiele, die mit ST und äquidistanten Stützstellen gerechnet werden, zeigen deutlich den Einfluß des nicht-glatten Lösungsverlaufs. Die erwartete Ordnung $1+\alpha$ stellt sich ein.

In den Beispielen 8-14 läßt das Lösungsverhalten auch bei Verwendung von SI keine besseren Resultate zu. Zieht man hingegen die in Kapitel 5 vorgestellten nicht-äquidistanten Stützstellen heran, die durch die angegebenen Werte für q realisiert werden, so stellen sich in den Beispielen 15-21 (gerechnet mit ST) und 22-27 (gerechnet mit SI) die üblichen Ordnungen 2 bzw. 4 ein. Daß dabei mit stark fallendem α keine so "schönen" Konvergenzordnungen resultieren, liegt in dem sehr stark anwachsenden q begründet; dann lassen sich nämlich voneinander verschiedene Stützstellen numerisch kaum mehr trennen.

Beispiele 28-33 zeigen deutlich, daß bei fehlender Glattheit oder auch bei glättender Wirkung des stetigen Anteils $k^*(s,t)$ eine Häufung der Stützstellen weder Vor- noch Nachteile erbringt.

Um logarithmisch-singuläre Kerne handelt es sich in den Beispielen 34-37, bei denen sich Logarithmusterm-abhängige Konvergenzordnungen nicht direkt nachweisen lassen; die Stützstellenstreuung bei SI erbringt jedoch offensichtlich den ordnungserhaltenden Effekt.

Die restlichen Beispiele unterscheiden sich von den vorangehenden durch Variation des stetigen Anteils $k^*(s,t)$ und der α-Terme. Es handelt sich teilweise um unsymmetrische Beispiele. Wird auch nicht in jedem Fall genau die erwartete Konvergenzordnung erreicht, so scheinen die theoretischen Ordnungsaussagen doch anhand der Testreihe belegt zu sein.

Beispiel 58 muß exakt integriert werden; dies ist durch eine Konvergenzordnung 9999 ausgedrückt.

7.3. Mehrdimensionale Fälle und Konvergenzordnungen

7.3.1. Parameterunabhängige Beispiele

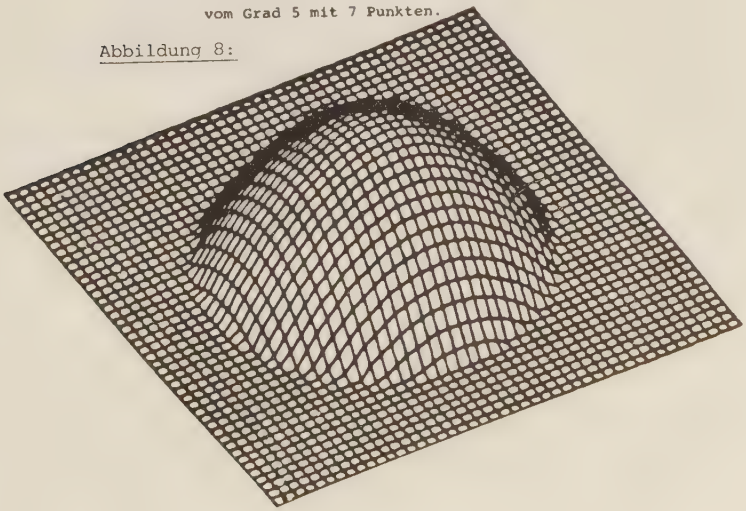
In diesen Fällen von "uneigentlichen Singularitäten" (2.1.1., 2.1.2.) wurde die Lösung in Kapitel 3 als glatt nachgewiesen. Insofern entstehen Ordnungsprobleme nicht. Von Fall zu Fall muß man ein geeignetes Verfahren bezüglich der singulären Gewichtsfunktion wählen oder konstruieren. In der einschlägigen Formelsammlung (STROUD [53]) findet man ausführliche Beschreibungen solcher Verfahren und ihrer Fehlertheorie. Abbildung 8 gibt einen Einblick in den Lösungsverlauf eines solchen Beispiels.

$k(s,t,x,y) = \sqrt{x^2+y^2}^{-1}$ über dem Einheitskreis.

Verfahren: Stroud [1971], S_2: 5-1 (singuläres Gewicht)

vom Grad 5 mit 7 Punkten.

Abbildung 8:



7.3.2. Parameterabhängige Beispiele

Zu Testzwecken werden im folgenden nur Beispiele in zwei Dimensionen vorgestellt. Höhere Dimensionen bereiten jedoch theoretisch keine Schwierigkeiten.
Wird der Integraloperator durch den Kern

$$k(s,t;x,y) = |s-x|^{\alpha-1} \; |t-y|^{\alpha-1}$$

erzeugt, und rechnet man über einem Quadrat, so kann man von einem nicht-glatten Lösungsverlauf auf dem gesamten Quadratrand ausgehen. Dieses Verhalten wurde schon in Abbildung 1 graphisch dargestellt.
Bei äquidistantem Gitter ergibt sich damit ein Ordnungsverlust, wie man ihn vom eindimensionalen Spezialfall her kennt.
Für α=o.9 werden Konvergenzordnungen für die Eigenwerte und für die Eigenfunktionen an drei ausgewählten Stellen angegeben. Die ausgesuchten Stellen müssen für feiner werdende Diskretisierungen festbleiben; z.B. erfüllen diese Bedingung im Einheitsquadrat die Punkte (o,o), (o,1), (1,o), die in diesem Beispiel auch als Referenzpunkte dienen.
Die Ordnung bemißt sich in Termen des Durchmessers des größten Teilrechtecks. Die beiden Tabellen zeigen die erwarteten Resultate.

N	Berechneter Eigenwert	Berechneter Eigenvektor	Konvergenz-ordnung Eigenwert	Konvergenz-ordnung Eigenfunktion
4	4.299o15	o.5ooooo o.5ooooo o.5ooooo		
16	4.692427	o.4567827 o.4567827 o.4567827		
36	4.735993	o.45271o7 o.45271o7 o.45271o7	1.65	1.83 1.83 1.83

N	Berechneter Eigenwert	Berechneter Eigenvektor	Konvergenz-ordnung Eigenwert	Konvergenz-ordnung Eigenfunktion
64	4.749635	o.4514774 o.4514774 o.4514774	1.71	1.79 1.79 1.79
1oo	4.755719	o.45o9371 o.45o9371 o.45o9371	1.73	1.79 1.79 1.79
144	4.758983	o.45o65o6 o.45o65o6 o.45o65o6	****	**** **** ****

Tabelle 2: $k(s,t;x,y) = |s-x|^{-o.1}\ |t-y|^{-o.1}$; $\Omega = [o,1]\times[o,1]$
Verfahren: Lineare Interpolation der Lösung.
Äquidistantes Gitter

N	Berechneter Eigenwert	Berechneter Eigenvektor	Konvergenz-ordnung Eigenwert	Konvergenz-ordnung Eigenfunktion
4	4.299o15	o.5ooooooo o.5ooooooo o.5ooooooo		
16	4.694456	o.4566169 o.4566169 o.4566169		
36	4.738o39	o.4525468 o.4525468 o.4525468	1.84	2.o3 2.o3 2.o3
64	4.751232	o.4513513 o.4513513 o.4513513	1.83	1.9o 1.9o 1.9o
1oo	4.756967	o.45o8397 o.45o8397 o.45o8397	1.85	1.9o 1.9o 1.9o
144	4.759982	o.45o5734 o.45o5734 o.45o5734	****	**** **** ****

Tabelle 3: $k(s,t;x,y) = |s-x|^{-o.1}\ |t-y|^{-o.1}$; $\Omega = [o,1]\times[o,1]$
Verfahren: Lineare Interpolation der Lösung.
Nichtäquidistantes Gitter.

Anmerkungen zu den Tabellen:

Die Berechnung der Konvergenzordnung erfolgt über vier Näherungswerte wie zu Beginn des Kapitels beschrieben. Für die letzten berechneten Werte können deshalb keine Konvergenzordnungen angegeben werden. Deshalb sind an diesen Stellen die Sterne eingefügt.
Tabelle 3 berücksichtigt nichtäquidistante Gitter, die in Kapitel 5 beschrieben wurden.

Eine Variation der Stärke der Singularität und die dazugehörigen Konvergenzresultate sind in einer weiteren Tabelle zusammengefaßt. Der Konvergenzordnungsabfall stellt sich bei äquidistantem Gitter ein, die Stützstellenhäufung zum Rand hin erbringt die diskutierten Vorteile.

Im einzelnen ergibt sich bei Verwendung der verallgemeinerten Trapezregel folgendes Bild:

$\alpha-1$	Konvergenzordnungen für die Eigenwerte bei äquidistantem Gitter	nicht-äquidistantem G.
-o.2	1.69	1.92
-o.3	1.65	1.99
-o.4	1.6o	2,o6
-o.5	1.55	2,12
-o.6	1.5o	2.18

Tabelle 4: $k(s,t;x,y) = |s-x|^{\alpha-1}\ |t-y|^{\alpha-1}$; $\Omega = [o,1]\times[o,1]$
Verfahren: Verallgemeinerte Trapezregel (lineare Interpolation der Lösung)

Wegen der stark ansteigenden Rechenzeiten mußten die Konvergenztests auf relativ kleine Stützstellenzahl beschränkt bleiben. Die Tendenz der Werte bestätigt die theoretischen Resultate; insbesondere wird die Verbesserung der Ordnungen durch das spezielle Gitter sichtbar.

Die Lösung des Eigenwertproblems des Operators, der durch

$$k(s,t;x,y) = \sqrt{(s-x)^2+(t-y)^2}^{-1}$$

erzeugt wird, ist graphisch in Abbildung 3 dargestellt. Die Ergebnisse, die mit der modifizierten Quadraturformelmethode errechnet wurden, sind nachfolgend tabelliert.

Bei äquidistanter Diskretisierung:

Knotenzahl	Näherung an den Eigenwert	Ordnungsaussage
9	3.572	
25	3.554	
49	3.545	
81	3.539	o.87
121	3.537	1.o4
169	3.535	1.1o
225	3.528	****

Tabelle 5: $k(s,t;x,y) = \sqrt{(s-x)^2+(t-y)^2}^{-1}$, $\Omega = [o,1]\times[o,1]$;
Verfahren: modifizierte Trapezregel.

Bei nicht-äquidistanter Diskretisierung:

Knotenzahl	Näherung an den Eigenwert	Ordnungsaussage
9	3.572	
25	3.568	
49	3.547	
81	3.538	2.24
121	3.534	2.34
169	3.531	2.33
225	3.529	****

Tabelle 6: $k(s,t;x,y) = \sqrt{(s-x)^2+(t-y)^2}^{-1}$, $\Omega = [o,1]\times[o,1]$;
Verfahren: Modifizierte Trapezregel.

Bei logarithmischen Kernsingularitäten erhält man entsprechende Ordnungsaussagen.
Die Ordnungsverbesserung durch die Stützstellenhäufung wird deutlich. Die über 2 hinausgehenden Ordnungen lassen sich jedoch theoretisch nicht deuten.

7.4. Konkrete Fehlerabschätzungen für Eigenwerte und Eigenfunktionen

Zunächst soll die Brauchbarkeit der Fehlerabschätzungen am Beispiel von stetigen Integraloperatoren demonstriert werden. Die Abschätzungen für die Eigenfunktionen sind dann von derselben Qualität wie die Eigenwertabschätzungen von BRAKHAGE [13]. Für diese Abschätzungen geht man im folgenden von einer Umformung von (1) in Kapitel (6.2.), S. 56 aus:

$$(T-\lambda I)(x-x_n) = -(Tx_n-\lambda_n x_n) + (\lambda-\lambda_n)x_n \qquad (1')$$

7.4.1. Stetige Integraloperatoren

Am Beispiel des Operators

$$Tx(s) = \int_0^1 (s+t)\, x(t)\, dt$$

soll ein Vergleich der Abschätzungen mit dem tatsächlichen Fehler durchgeführt werden. Die Trapezregel mit Schrittweite h=1/3 wird als Quadraturformel verwendet.
BAKER [14] gibt folgende Näherungen für beliebige h an:

$$\lambda_{h,1} = 0.5 + \sqrt{(1+0.5h^2)/3},\quad x_{h,1}(s_i) = s_i + \sqrt{(1+0.5h^2)/3}$$

$$\lambda_{h,2} = 0.5 - \sqrt{(1+0.5h^2)/3},\quad x_{h,2}(s_i) = s_i - \sqrt{(1+0.5h^2)/3}\ ,$$

$i=0,\ldots,n;\ h=1/n;\ s_i=ih.$

Die tatsächlichen Werte sind:

$$\lambda_1 = 0.5 + 1/\sqrt{3}\ ,\ x_1(s) = s + 1/\sqrt{3}$$

$$\lambda_2 = 0.5 - 1/\sqrt{3}\ ,\ x_2(s) = s - 1/\sqrt{3}\ .$$

Nach BRAKHAGE [13] kann man für den 1. Eigenwert λ_1 abschätzen:

$$|\lambda_{h,1}-\lambda_1| \leq 1.71\cdot 10^{-2}.$$

Zum Vergleich sind die tatsächlichen Fehler zu betrachten:

$$|\lambda_{h,1}-\lambda_1| = 1.58\cdot 1o^{-2} \ , \ |\lambda_{h,2}-\lambda_2| = 1.58\cdot 1o^{-2} \ .$$

Mit den angegebenen Schranken kann man aus Satz 3 oder Satz 4 aus 6.2. für die normierte Eigenfunktion $\|x_{h,1}\|=1$ Fehlerabschätzungen berechnen:

$$\|x-x_{h,1}\|_2 \leq 1.27\cdot 1o^{-2} \ .$$

Der tatsächliche Fehler beträgt in diesem Fall

$$\|x-x_{h,1}\|_2 \leq 3.62\cdot 1o^{-3} \ .$$

Nun sollen solche Schranken für verschiedene Quadraturverfahren angegeben werden.
Betrachtet man z.B. die Eigenwertaufgabe

$$\lambda x(s) = \int_o^1 e^{st}\, x(t)\, dt$$

mit stetigem, symmetrischem Kern, und berücksichtigt man wieder die Ergebnisse der genannten Arbeit von BRAKHAGE, so ergeben sich bei Anwendung einer Gauß'schen Quadraturformel mit m=3 Stützstellen die Eigenwertnäherungen

$$\lambda_{m,1}= 1.353o25, \ \lambda_{m,2}= o.1o5946, \ \lambda_{m,3}= o.oo3439,$$

und es existieren Eigenwerte λ_1 und λ_2 des Ausgangsproblems, so daß gilt:

$$|\lambda_{m,1}-\lambda_1| \leq 3\cdot 1o^{-4}, \ |\lambda_{m,2}-\lambda_2| \leq 3\cdot 1o^{-3} \ .$$

Um die Abschätzungen für die Eigenfunktionen auswerten zu können, benötigt man noch die Größe

$$\tilde{d} = |\lambda_{m,1}-\lambda_{m,2}|-|3\cdot 1o^{-4}+3\cdot 1o^{-3}| = 1.243779$$

Damit bekommt man die globale Abschätzung für die normierten Eigenfunktionen $\|x\| = \|x_{m,1}\| = 1$ zum Eigenwert λ_1 bzw. $\lambda_{m,1}$:

$$\|x - x_{m,1}\|_2 \leq 4.2 \cdot 10^{-4} \ .$$

Für die Eigenfunktion zum Eigenwert λ_2 kann keine Abschätzung getroffen werden, da die Brakhage-Formel für den 3. Eigenwert λ_3 keine Abschätzung zuläßt, welche zur Berechnung von $\tilde{d}$ notwendig wäre. In der nachfolgenden Tabelle sind unter Verwendung von Ergebnissen aus Brakhage-Abschätzungen bei anderen Quadraturformeln und anderer Anzahl von Stützstellen aufgeführt.

	$\lvert\lambda_1 - \lambda_{m,1}\rvert$	$\lvert\lambda_2 - \lambda_{m,2}\rvert$	$\lVert x_1 - x_{m,1}\rVert_2$
Trapezregel, m=148	$\leq 1.2 \cdot 10^{-4}$	$\leq 1.2 \cdot 10^{-3}$	$\leq 2.4 \cdot 10^{-4}$
Simpsonregel, m=16	$\leq 2.7 \cdot 10^{-5}$	$\leq 2.7 \cdot 10^{-4}$	$\leq 5.4 \cdot 10^{-5}$
Gauß-QF, m=5	$\leq 4.0 \cdot 10^{-9}$	$\leq 4.0 \cdot 10^{-8}$	$\leq 8.0 \cdot 10^{-9}$

Tabelle 7: Fehlerabschätzungen bei verschiedenen Quadraturverfahren und stetigen Integraloperatoren.

Die Abschätzungen sind global; lokale Abschätzungen nach Kapitel 6 sind von derselben Qualität.

Ohne Schwierigkeit erweitert man die Abschätzungsmöglichkeit für symmetrische Integraloperatoren auf mehrere Raumdimensionen. Das Problem, einen speziellen Quadraturfehler zu bestimmen, wird natürlich mit zunehmender Dimensionszahl komplexer. Und wenn man nicht über rechteckigen Grundgebieten rechnet, vergröbern sich die Abschätzungen nochmals. Betrachten wir, dem Vorgehen in STROUD [53] folgend, zunächst ein Beispiel in 2 Raumdimensionen über dem Einheitskreis:

$$\iint_K \sin(s+t+x+y)\ f(x,y)\ dxdy = Tf(s,t).$$

Zur numerischen Behandlung wird eine Formel vom Grad 5 mit 7 Punkten herangezogen.(STROUD [53]; S_2:5-1)
Zur Eigenwertabschätzung muß man folgenden Kubaturfehler abschätzen:

$$\iint_K \sin(s+t+x+y)\cdot\sin(x+y+\sigma+\tau)\ dxdy - \sum_{j=1}^{7} \omega_j\ (\sin(s+t+x_j+y_j)\cdot\sin(x_j+y_j+\sigma+\tau))$$

Mit $\tilde{f}(x,y)$ sei der Integrand in obiger Formel bezeichnet. Um diesen Fehler abschätzen zu können, werden einige partielle Ableitungen der Funktion $\tilde{f}(x,y)$ benötigt.

Mit der Nomenklatur in STROUD [12]:

$$M_{m-j,j:x} = \sup_{u\in[-1,1]} |\tilde{f}^{(m-j,j)}(u,o)|$$

$$M_{i,m-i:y} = \sup_{v\in[-1,1]} |\tilde{f}^{(i,m-i)}(o,v)|$$

$$M_{p,q} = \sup_{K} |\tilde{f}^{(p,q)}(u,v)|$$

ist mit m=5

$$M_{5,o:x} = 32 = M_{o,5:y}$$

$$M_{4,1:x} = 22 = M_{1,4:y}$$

$$M_{3,2} = 32 = M_{2,3:y}$$

und für den Quadraturfehler gilt:

$$|E(f)| \leq M_{5,o:x}\cdot e_{5,o:x} + M_{o,5:y}\cdot e_{o,5:y} + M_{4,1:x}\cdot e_{4,1:x} + M_{1,4:y}\cdot e_{1,4:y} + M_{3,2}\cdot e_{32} + M_{2,3:y}\cdot e_{2,3:y} = o.13247$$

mit tabellierten Sard- Fehlerkonstanten $e_{i,j}$.

Für die Eingrenzung des berechneten Eigenwerts $\lambda_{m,1} = 4.27$ erhält man daraus

$$|\lambda_1 - \lambda_{m,1}| \leq 3.11 \cdot 10^{-2}$$

und mit $\tilde{d} = 4.23$ kann man für die zugehörige normierte Eigenfunktion weiter abschätzen:

$$\|x - x_{m,1}\|_2 \leq 7.8 \cdot 10^{-3} \ .$$

Wählt man die Eigenwertaufgabe

$$\iint_K (s^2+t^2+x^2+y^2)\, f(x,y)\, dxdy = \lambda f(s,t) \ ,$$

so errechnen sich die Sard-Fehlergrößen zu Null; es ergeben sich deshalb auch Abschätzungen, die bestätigen, daß die Eigenwerte und Eigenfunktionen vom gewählten Verfahren exakt berechnet werden. Dies steht in Übereinstimmung mit der Theorie.

Für den Fall von schwachsingulären Integraloperatoren, bei denen die Singularität nur in den Integrationsvariablen auftaucht, können keine Abschätzungen getroffen werden, da solche Operatoren nicht symmetrisch bzw. normal sind.

7.4.2. Schwachsinguläre Integraloperatoren

In Kapitel 6 wurden Fehlerabschätzungen in ein- oder mehrdimensionalen Fällen hergeleitet. Diese Abschätzungen haben auch für schwachsinguläre Integralgleichungen Gültigkeit. Bei der praktischen Anwendung muß man mit Schwierigkeiten rechnen, da die Einflußgrößen Quadraturfehler bei nicht-glatten Integranden sind. Gegenüber den Brakhage-Schranken für den stetigen Fall hat man in den Gewichten verallgemeinerter Quadraturverfahren für schwachsinguläre Integranden eine Abhängigkeit vom Parameter s. Benutzt man zur Behandlung des schwachsingulären Problems ein modifiziertes Quadraturverfahren, so werden die Abschätzungen von der zweifachen Approximation abhängen, aus der das Verfahren hervorgeht.
Mit einiger Mühe lassen sich Fehlerschranken angeben. Die Fehlerabschätzungen sind nicht scharf. Jedoch gewinnt man Einblick in das Konvergenzverhalten der Methoden. Möglichkeiten und Schwierigkeiten dieser Untersuchungen sollen im folgenden aufgezeigt werden.

Ausgangspunkt ist wieder der Einschließungssatz normaler Operatoren; damit hat man die Möglichkeit, den Abstand eines mittels Approximation errechneten Eigenwerts μ vom zugehörigen Eigenwert λ der Integralgleichung zu messen:

$$\min_{\lambda \in S(K)} |\lambda-\mu| \leq \|r\|_2 / \|\tilde{y}\|_2 \quad , \forall\, \tilde{y} \neq o .$$

Dabei bezeichnet r die Differenz

$$r = K\tilde{y} - \mu\tilde{y} .$$

Bei der Wahl von $\tilde{y}$ hat man einige Möglichkeiten. Die Brakhage-Abschätzung beruht auf der Wahl $\tilde{y} := y$, wenn y Eigenfunktion zum berechneten Eigenwert μ ist.

Im stetigen Fall gilt dann für feiner werdende Diskretisierung:

$$\| r \|_2 = \frac{1}{|\mu|} \cdot \| (K-H)Hy \|_2 \leq O(\delta) \cdot \Big(\sum_{j=1}^{n} \omega_j |y_j|^2 \Big)^{1/2} \to 0$$

mit einem Quadraturfehler δ und den Gewichten ω_j einer Quadraturformel.
Zur Abschätzung des Nenners führt folgender Ansatz bei stetigen Problemen zum Ziel:

$$\| y \|_2^2 = \int_0^1 y^2(s)\, ds - \sum_{j=1}^{n} \omega_j |y(t_j)|^2 + \sum_{j=1}^{n} \omega_j |y(t_j)|^2 .$$

Wenn man auf den ersten und zweiten Term dieser Identität den Näherungsoperator H anwendet, so ergibt sich:

$$\| y \|_2^2 = \frac{1}{|\mu|^2} \cdot \Big(\int_0^1 \Big| \sum_{k=1}^{n} \omega_k\, k(s,t_k)\, y(t_k) \Big|^2 ds - \sum_{j=1}^{n} \omega_j \Big| \sum_{k=1}^{n} \omega_k\, k(t_j,t_k)\, y(t_k) \Big|^2 \Big) + \sum_{j=1}^{n} \omega_j |y(t_j)|^2 .$$

Damit kann man mit einem einfach strukturierten Quadraturfehler, etwa δ_1, abschätzen:

$$\| y \|_2^2 \geq (1 - \delta_1/|\mu|^2) \cdot \sum_{j=1}^{n} \omega_j |y(t_j)|^2 ,$$

woraus $\min_{\lambda \in S(K)} |\lambda - \mu| = O(\delta)$ folgt.

Wegen der s-Abhängigkeit der Gewichte kann man dieses Vorgehen nicht direkt verallgemeinern.

Für schwachsinguläre Integralgleichungen mit algebraisch- oder logarithmisch-singulären Faltungskernen σ gelangt man aber über eine (grobe) Abschätzung zur analogen Situation; es gilt nämlich folgender

SATZ 1: Für Faltungen $K*f = \int_\Omega \sigma(\|s-t\|)\, f(t)\, dt$ gilt:

$$\|K*f^2\|_1 \leq \|f\|_2^2 \cdot \|\sigma\|_1 .$$

Beweis: Mit der Young-Ungleichung:

$$\|K*f\|_1 \leq \|\sigma\|_1 \cdot \|f\|_1 \text{ gilt:}$$

$$\|K*f^2\|_1 = \int_\Omega \left| \int_\Omega \sigma(\|s-t\|)\, f^2(t)\, dt \right| ds \leq \|\sigma\|_1 \|f^2\|_1$$

$$= \|\sigma\|_1 \|f\|_2^2 .$$

∎

Damit läßt sich der Nenner besser handhaben. In einer Dimension erhält man:

SATZ 2: Bei Anwendung der verallgemeinerten Trapezregel (P_n) und schwachsingulären Kernfunktionen vom Faltungstyp gilt für die berechnete Eigenfunktion:

$$\|y\|_2 \geq O(\sqrt{h}) \left(\sum_{j=1}^{n} |y_j|^2 \right)^{1/2} := O(\sqrt{h})\, \|\underline{y}\|_2 .$$

Beweis: Mit Satz 1 schätzt man ab:

$$\|y\|_2^2 \geq \|Ky^2\|_1 / \|\sigma\|_1 =$$

$$= \frac{1}{\|\sigma\|_1} \left[\int_0^1 \left| \int_0^1 \sigma(s,t)\, y^2(t)\, dt \right| ds - \int_0^1 \left| \sum_{j=1}^n \omega_j(s)\, y_j^2 \right| ds + \right.$$

$$\left. + \int_0^1 \left| \sum_{j=1}^n \omega_j(s)\, y_j^2 \right| ds \right] \quad (1)$$

Der erste und zweite Term von (1) läßt sich als Quadraturfehler abschätzen:

$$R_n(y^2) := \left| \int_0^1 \int_0^1 \sigma(s,t)\, y^2(t)\, dt\, ds - \int_0^1 \sum_{j=1}^n \omega_j(s)\, y_j^2\, ds \right|$$

$$= \left| \int_0^1 \int_0^1 \sigma(s,t)\, [I-P_n]\, y^2(t)\, dt\, ds \right| .$$

Nach dem Mittelwertsatz existiert ein $|\varepsilon| \le h$, so daß gilt:

$$R_n(y^2) = \left| \int_0^1 \int_0^1 \sigma(s,t) \left[\left(\frac{1}{\mu} \sum_{j=1}^n \omega_j(t+\varepsilon)\, y_j \right)^2 - \left(\frac{1}{\mu} \sum_{j=1}^n \omega_j(t)\, y_j \right)^2 \right] \right.$$

$$\left. dt\, ds \right| .$$

Vertauschung der Integrationsreihenfolge und einfache Normabschätzungen ergeben für den algebraisch-singulären Fall:

$$R_n(y^2) \le \frac{1}{|\mu|^2} \frac{2^\alpha}{1-\alpha} \sup_{|\varepsilon| \le h} \int_0^1 \left| \sum_{j=1}^n y_j (\omega_j(t+\varepsilon) - \omega_j(t)) \right|^2 dt \le$$

$$\le \frac{1}{|\mu|^2} \frac{2^\alpha}{1-\alpha} \|y\|_2^2 \sup_{|\varepsilon| \le h} \int_0^1 \max_{1 \le k \le n} |\omega_k(t+\varepsilon) - \omega_k(t)| \cdot$$

$$\cdot \sum_{j=1}^n |\omega_j(t+\varepsilon) - \omega_j(t)|\, dt \le$$

$$\leq \frac{1}{|\mu|^2} \frac{2^{\alpha+1}}{1-\alpha} \|\underline{y}\|_2^2 \sup_{|\varepsilon|\leq h} \int_0^1 \max_{1\leq k\leq n} \left| \frac{1}{h} \left(\int_{t_{k-1}}^{t_k} (|t+\varepsilon-\tau|^{-\alpha} - |t-\tau|^{-\alpha}) \right.\right.$$

$$\left.\left. (\tau - t_{k-1})\, d\tau \right| \cdot \frac{1}{h} \cdot h \cdot \int_0^1 \left| |t+\varepsilon-\tau|^{-\alpha} - |t-\tau|^{-\alpha} \right| d\tau\, dt \,.$$

Nach Ausnutzung der Definition der Gewichte, Vertauschung der Integrationsreihenfolge im ersten Faktor des Integranden und unter Berücksichtigung eines elementaren Ergebnisses:

$$\sup_{|\varepsilon|\leq h} \int_0^1 \left| |t+\varepsilon-\tau|^{-\alpha} - |t-\tau|^{-\alpha} \right| d\tau \leq \frac{4}{1-\alpha} \left(\frac{h}{2}\right)^{1-\alpha}$$

ergibt sich:

$$R_n(y^2) \leq \frac{1}{|\mu|^2} \cdot \frac{2^{\alpha+1}}{1-\alpha} \cdot \|\underline{y}\|_2^2 \cdot \frac{h}{2} \cdot \left(\frac{4}{1-\alpha} \cdot \left(\frac{h}{2}\right)^{1-\alpha}\right)^2 =$$

$$= O(h^{3-2\alpha}) \|\underline{y}\|_2^2 \,.$$

Der dritte Term von (1) muß noch nach unten abgeschätzt werden:

$$\int_0^1 \left| \sum_{j=1}^n \omega_j(s) y_j^2 \right| ds \geq \|\underline{y}\|_2^2 \min_{1\leq j\leq n} \int_0^1 \omega_j(s)\, ds = O(h) \cdot \|\underline{y}\|_2^2 \,.$$

Damit gilt:

$$\|\underline{y}\|_2 \geq \frac{1}{1-\alpha} \left(\frac{h}{2} - \frac{1}{|\mu|^2} \frac{2^{2+3\alpha}}{(1-\alpha)^2} h^{3-2\alpha} \right)^{1/2} \|\underline{y}\|_2$$

$$= O(\sqrt{h}) \|\underline{y}\|_2 \,,$$

falls das Argument der Wurzel positiv ist; dies ist asymptotisch erreichbar.
Damit ist der Satz bewiesen. ∎

Folgerung 1: Aus Satz 2 folgt für den logarithmischen Fall dieselbe Ordnungsaussage.

Damit erhält man Fehlerabschätzungen:

SATZ 3: Für die verallgemeinerte Trapezregel gilt bei schwachsingulären Kernen:

$$\text{a)} \quad \min_{\lambda \in S(K)} |\lambda-\mu| \leq \frac{2^{\alpha+1}}{(1-\alpha)^2 \left(|\mu|^2 (1-\alpha)^2/2 - 2^{2+3\alpha} h^{2-2\alpha} \right)^{1/2}} \cdot h^{1-\alpha}$$

$$\text{b)} \quad \min_{\lambda \in S(K)} |\lambda-\mu| \leq \frac{2}{\left(|\mu|^2/2 - 4h^2 |\ln(h/2)|^2 \right)^{1/2}} \cdot h\,|\ln(h/2)|$$

a) gilt für den algebraischen, b) für den logarithmischen Fall.

Beweis: Der Zähler muß noch abgeschätzt werden:

$$\| r(y) \|_2 = \frac{1}{|\mu|} \| (K-H)Hy \|_2 =$$

$$= \frac{1}{|\mu|} \cdot \left(\int_0^1 \left| \int_0^1 \sigma(s,t) \, [I-P_n] \sum_{j=1}^{n} \omega_j(t)\, y_j \, dt \right|^2 ds \right)^{1/2}$$

Mit einer speziellen Form der Young-Ungleichung:

$\|K*f\|_2 \leq \|k\|_1 \|f\|_2$, erhält man in den algebraisch-singulären Fällen:

$$\| r(y) \|_2 \leq \frac{1}{|\mu|} \frac{1}{(1-\alpha)} \left(\int_0^1 | [I-P_n] \sum_{j=1}^{n} \omega_j(t)\, y_j |^2 \, dt \right)^{1/2} .$$

Wie in Satz 2 läßt sich dieser Ausdruck weiter abschätzen:

$$\| r(y) \|_2 \leq \frac{1}{|\mu|} \frac{2^{\alpha+1}}{(1-\alpha)^2} h^{1.5-\alpha} \| \underline{y} \|_2 .$$

Zusammenfassung der Terme ergibt nach Division die Behauptung des Satzes für den algebraisch-singulären Fall; im logarithmischen Fall verfährt man analog. ∎

Für das Anwendungsbeispiel in 7.5. werden diese Fehlerschranken ausgerechnet.

7.5. Ein Transportproblem als physikalische Anwendung

Einen Ansatzpunkt für eine direkte Anwendung des Themenkreises dieser Arbeit entnimmt man der physikalischen Literatur auf dem Gebiet der Neutronen-Transporttheorie, insbesondere der Reaktortechnik. Ausgangsmodell vieler Probleme ist die Boltzmann-Gleichung, deren numerischer Behandlung zahlreiche Veröffentlichungen gewidmet sind. Einige Varianten stützen sich auf die Kenntnis physikalischer Zusammenhänge. BAREISS [1o] unternimmt den Versuch, auch schwierigere Probleme einer numerischen Behandlung zugänglich zu machen, während DAVISON [19] in Spezialfällen auch Konvergenzgeschwindigkeiten der unterliegenden Verfahren angibt. Er stellt die Überführung in ein Integralgleichungseigenwertproblem dar. In gewissen Fällen resultiert ein schwachsingulärer Integraloperator. Ziel dieses letzten Abschnitts ist es, die beschriebenen Methoden auf solche Probleme anzuwenden und deren einfache Handhabung und Effizienz zu demonstrieren. BENNETT [12] entnimmt man eine knappe Zusammenfassung des komplexeren physikalischen Hintergrundes:
Betrachtet man die mono-energetische Transportgleichung mit isotroper Streuung, so hängt die kritische Zahl c_o der Sekundärneutronen pro Stoß mit einem schwachsingulären Integralgleichungseigenwertproblem in folgender Weise zusammen:

Für den Fluß Φ gilt im eindimensionalen Fall:

$$(1) \qquad \lambda\Phi(s) = \int_o^L E_1(|s-t|)\ \Phi(t)\ dt\ .$$

Dabei ist L problemabhängig und $E_1(t) = \int_o^1 e^{-t/\tau}\ \frac{d\tau}{\tau}$.

Für ein quadratisches Grundgebiet gilt:

$$(2)\quad \lambda\Phi(s,t) = \int_0^L \int_0^L K(R)/R\ \Phi(x,y)\ dxdy,$$

wobei $R^2 = (s-x)^2+(t-y)^2$ und $K(R) = \int_0^1 \frac{e^{-R/\tau}}{\sqrt{1-\tau^2}}\, d\tau$ gilt.

In beiden Fällen ist $\lambda=2/c_o$.

Mit den üblichen Bezeichnungen für das Exponentialintegral

$Ei(-x) := \int_{-\infty}^{-x} e^{\sigma}/\sigma\ d\sigma$, $x>o$, erhält man nach Transformation

$\sigma := -t/\tau$

$$E_1(t) = \int_0^1 e^{-t/\tau}\ \frac{d\tau}{\tau} = -\int_{-\infty}^{-t} e^{\sigma}/\sigma\ d\sigma = -Ei(-t)$$ und damit aus (1)

$$(1')\quad \lambda\Phi(s) = -\int_0^L Ei(-|s-t|)\ \Phi(t)\ dt\ .$$

Das Problem wird durch einen im wesentlichen logarithmisch-singulären Kern beschrieben.(Vgl. etwa GRÖBNER/HOFREITER [27]) Es liegt damit ein schwachsinguläres Eigenwertproblem vor. Zur numerischen Auswertung des Exponentialintegrals in den folgenden Programmen wurde eine ACM-Routine†) herangezogen. Durch Reihenentwicklungen werden sehr genaue Werte erzielt.

Damit hat man aus unserer Sicht 2 Möglichkeiten der numerischen Behandlung:

a) Verallgemeinerte Quadratur:

$$\int_0^L Ei(-|s-t|)\ dt = \sum_{j=1}^n \omega_j(s)$$

$$\int_0^L Ei(-|s-t|)\ t\ dt = \sum_{j=1}^n \omega_j(s)\ t_j\ .$$

---

†) Collected Algorithms from the Association for Computing Machinery, Inc.

Als Bestimmungsgleichungen für die Gewichte ω_j und Stützstellen t_j aufgefaßt, verallgemeinert diese Formel die Trapezregel.

b) Modifizierte Quadratur:

$$\int_0^L Ei(-|s-t|)\, f(t)\, dt = \int_0^L Ei(-|s-t|)[f(t)-f(s)]\, dt + \left(\int_0^L Ei(-|s-t|)\, dt \right) f(s).$$

In diesem Fall kann man auf das erste Integral eine gewöhnliche Quadraturformel anwenden, während das 2. Integral analytisch berechnet werden muß.
Beide Möglichkeiten sind vergleichsweise einfach realisierbar und sollen dargestellt werden.

Um die verallgemeinerte Trapezregel in diesem Fall anzusetzen genügt es, wenn man ein äquidistantes Gitter zugrundelegt,

$$\alpha_j(s) = 1/h \int_{t_{j-1}}^{t_j} (t_j-t)\, Ei(-|s-t|)\, dt \text{ und}$$

$$\beta_j(s) = 1/h \int_{t_{j-1}}^{t_j} (t-t_{j-1})\, Ei(-|s-t|)\, dt \text{ zu berechnen.}$$

Aus diesen Größen berechnen sich dann die Gewichte der Formel zu:

$$\omega_1(s) = \alpha_2(s);\ \omega_j(s) = \alpha_{j+1}(s)+\beta_j(s)\ ,\ j=2(1)n-1;$$

$$\omega_n(s) = \beta_n(s).$$

h bezeichnet die äquidistante Schrittweite; $h=(b-a)/(n-1)$, $t_j=a+(j-1)h$.
Mittels partieller Integration und Substitution ergeben sich:

$$\alpha_j(t_i) = Ei(-|t_i-t_{j-1}|)[h/2-(t_j-t_i)^2/(2h)]$$
$$+ Ei(-|t_i-t_j|)[(t_j-t_i)^2/(2h)]$$
$$+ e^{-|t_i-t_j|}[|t_i-t_j|-1]/(2h)$$
$$- e^{-|t_i-t_{j-1}|}[2|t_i-t_j|-|t_i-t_{j-1}|-1]/(2h)$$

$$\beta_j(t_i) = Ei(-|t_i-t_j|)[h/2-(t_i-t_{j-1})^2/(2h)]$$
$$+ Ei(-|t_i-t_{j-1}|)[(t_i-t_{j-1})^2/(2h)]$$
$$+ e^{-|t_i-t_j|}[|t_i-t_j|-2|t_i-t_{j-1}|-1]/(2h)$$
$$+ e^{-|t_i-t_{j-1}|}[|t_i-t_{j-1}|-1]/(2h)$$

Damit kann man das Eigenwertproblem lösen.

Einige Tabellen geben im Vergleich Werte für die verschiedenen Methoden wieder.

N \ L	o.5	1.o	1.5	2.o	3.o	4.o
15	2.239314o	1.6191732	1.3953596	1.28o6879	1.1666714	1.11199o1
21	2.2372175	1.6173194	1.3935757	1.2789313	1.164935o	1.11o2639
31	2.236o4o8	1.6162821	1.3925789	1.27795o6	1.1639655	1.1o9299o
41	2.2356o96	1.6159o3o	1.3922153	1.2775932	1.1636126	1.1o89477
61	2.2352888	1.6156218	1.3919459	1.2773288	1.163352o	1.1o86886
81	2.2351717	1.6155194	1.3918481	1.2772329	1.1632577	1.1o85949
1o1	2.2351159	1.61547o7	1.3918o16	1.2771874	1.163213o	1.1o855o5
121	2.235o849	1.6154436	1.3917758	1.2771622	1.1631882	1.1o85261
141	2.235o659	1.6154271	1.39176o1	1.2771468	1.1631731	1.1o85111
161	2.235o534	1.6154162	1.3917497	1.2771366	1.1631632	1.1o85o13

Tabelle 8: Eigenwerte, verallgemeinerte Trapezregel

N \ L	o.5	1.o	1.5	2.o	3.o	4.o
15	---	---	1.3927o4o	1.278228o	---	---
21	2.235369o	---	1.392231o	1.277691o	---	---
41	2.2351o5o	1.615497o	1.391853o	1.277261o	1.163323o	1.1o869oo
61	2.235o53o	1.615432o	---	---	1.163218o	1.1o857oo
81	2.235o35o	1.6154o9o	1.39175oo	---	1.16318oo	1.1o8526o
1o1	2.235o24o	1.615398o	1.391737o	1.277129o	---	---
121	---	1.615392o	1.39173oo	1.277121o	1.163152o	1.1o8494o
141	---	1.615388o	---	---	1.163146o	---
161	---	---	---	---	---	1.1o8483o
∞	2.235oo4o	1.615379o	1.3917o7o	1.2771ooo	1.163124o	1.1o8462o

Tabelle 9: Eigenwerte, Methode A, BENNETT[12]; mit ∞ gekennzeichnete Werte wurden mittels Extrapolation berechnet.

N \ L	o.5	1.o	1.5	2.o	3.o	4.o
15	---	---	1.392127o	1.277477o	---	---
21	2.235319o	1.615623o	1.39193oo	1.277299o	1.1633ooo	1.1o8618o
31	---	---	1.391815o	1.277194o	---	---
41	2.235o96o	1.615445o	1.391773o	1.277155o	1.163176o	1.1o851oo
61	2.235o51o	1.6154o9o	---	---	1.163151o	1.1o8487o
81	2.235o35o	1.615396o	---	---	1.163142o	1.1o8479o
1o1	2.235o3oo	1.61539oo	---	---	1.163138o	---
121	---	1.615385o	1.391721o	1.2771o8o	---	1.1o8473o
141	---	---	---	---	1.163135o	---
∞	2.235oo4o	1.615379o	1.3917o7o	1.2771ooo	1.163124o	1.1o8462o

Tabelle 1o: Eigenwerte, Methode B, BENNETT[12]

N \ L	o.5	1.o	1.5	2.o	3.o	4.o
15	2.2354241	1.61567o5	1.3919369	1.27727o1	1.1632o35	1.1o84569
21	2.2352252	1.6155367	1.3918413	1.2772o55	1.1631931	1.1o84962
31	2.23511o2	1.6154545	1.3917774	1.277156o	1.1631682	1.1o84935
41	2.23511o2	1.6154545	1.3917774	1.277156o	1.1631682	1.1o84935
61	2.235o363	1.6153991	1.3917318	1.2771177	1.1631421	1.1o8478o
81	2.235o249	1.61539o4	1.3917243	1.2771111	1.1631369	1.1o84742
1o1	2.235o196	1.6153862	1.39172o7	1.2771o79	1.1631344	1.1o84721
121	2.235o167	1.6153839	1.3917187	1.2771o61	1.1631329	1.1o847o9
141	2.235o149	1.6153825	1.3917175	1.2771o5o	1.163132o	1.1o847o2
161	2.235o137	1.6153816	1.3917167	1.2771o43	1.1631314	1.1o84697

Tabelle 11: Eigenwerte, modifizierte Simpsonregel

Zur Anwendung eines modifizierten Quadraturverfahrens muß man

$$\int_0^L Ei(-|s-t|)\,dt \text{ exakt berechnen. Es ergibt sich:}$$

$$\int_0^L Ei(-|s-t|)\,dt = \int_0^s Ei(t-s)\,dt + \int_s^L Ei(s-t)\,dt = \ldots$$

und mit den Substitutionen $\sigma=s-t$ bzw. $\sigma=t-s$ kann man weiter umformen:

$$\ldots = \int_0^s Ei(-\sigma)\,d\sigma + \int_0^{L-s} Ei(-\sigma)\,d\sigma = s\,Ei(-s)+(L-s)\,Ei(s-L) + e^{-s}+e^{-(L-s)}-2$$

Auf das 1. Integral kann man z.B. die gewöhnliche, zusammengesetzte Simpsonregel anwenden. Die Ergebnisse bei diesem Verfahren sind in Tabelle 11 dargestellt.

Schließlich sollen Fehlerabschätzungen angegeben werden. In diesen Beispielen muß man die Struktur des Exponentialintegrals $Ei(x)$ beachten, für die gilt:

$$Ei(x) = C + \ln(x) + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{x^i}{i\cdot i!} \;;$$

C bezeichnet dabei die Eulersche Konstante.

Die Abschätzungen vergröbern sich nur unwesentlich, wenn man die Reihe im Laufe der Betrachtungen durch die Exponentialfunktion abschätzt.

Am Beispiel N=161, d=o.5 ergeben sich für den größten Eigenwert λ und die zugehörige normierte Eigenfunktion nachfolgende Abschätzungen, wenn man die Ergebnisse aus den Kapiteln 6 und 7.4.2. verwendet:

$$|\lambda-\mu_{161}| \le 2.72\cdot 1o^{-3} \quad \text{und} \quad \|x-x_{161}\| \le 1.14\cdot 1o^{-2}\,.$$

LITERATUR

1. Anselone, P.M.: Collectively compact operator approximation theory and applications to integral equations. Prentice Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J.(1971)

2. Anselone, P.M.: Singularity subtraction in the numerical solution of integral equations. J. Austral. Math. Soc. (Series B) 22, 4o8-418(1981)

3. Atkinson, K.E.: A survey of numerical methods for the solution of Fredholm integral equations of the second kind. SIAM, Philadelphia(1976)

4. Atkinson, K.E.: The numerical solution of Fredholm integral equations of the second kind. SIAM J. Numer. Anal. 3 (v. 4) 337-348(1967)

5. Atkinson, K.E.: The numerical solution of Fredholm integral equations of the second kind with singular kernels. Numer. Math. 19, 248-259(1972)

6. Auer, P.L.; Gardner, C.S.: Note on singular integral equations of the Kirkwood-Riseman type. J. Chem. Phys. 23, 1545-1546(1955)

7. Baker, C.T.H.: The numerical treatment of integral equations Clarendon Press, Oxford(1977)

8. Baker, C.T.H.: Korrespondenz.

9. Baker, C.T.H.: The deferred approach to the limit for eigenvalues of integral equations. SIAM J. Numer. Anal. 8, 1-1o(1971)

1o. Bareiss, E.H.: A survey and classification of neutron transport theory calculation techniques. 2nd Geneva Conference A/Conf. 15/p. 639

11. Bechlars, J.: Glattheit und numerische Berechnung der Lösung linearer Integralgleichungen 2.Art mit schwachsingulären Kernen. Bericht des Hahn-Meitner-Instituts für Kernforschung, Berlin, Nr. HMI-B 283(1978)

12. Bennett, J.H.: Integral equation methods for transport problems. Numer. Math. 6, 49-54(1964)

13. Brakhage, H.: Zur Fehlerabschätzung für die numerische Eigenwertbestimmung bei Integralgleichungen. Numer. Math. 3, 174-179(1961)

14. Bronstein, I.N.; Semendjajew, K.A.: Taschenbuch der Mathematik. Verlag Harri Deutsch, Zürich und Frankfurt/Main(1975)

15. Chandler, G.A.: Superconvergence of numerical solutions to second kind integral equations. Ph. D. Thesis, Australian National University, Canberra(1979)

16. Chandler, G.A.: Superconvergence for second kind integral equations. In: The Application and numerical solution of integral equations (eds. R.S. Anderssen, F.R. de Hoog and M.A. Lukas), Alphen aan den Rijn, Sijthoff and Noordhoff(198o)

17. Chatelin, F.E.: Numerical computation of the eigenelements of linear integral operators by iterations. SIAM J. Numer. Anal. 15, no. 6, 1112-1124(1978)

18. Davis, A.M.J.: Waves in the presence of an infinite dock with gap. J. Inst. Maths. Applics. 6, 141-156(197o)

19. Davison, B.: On the rate of convergence of the spherical harmonics method. Can. J. Phys. 38, 1526-1545(196o)

2o. Delves, L.M.; Walsh, J. (eds.): Numerical solution of integral equations. Oxford, Clarendon Press(1974)

21. Edwards, R.E.: Functional analysis. Theory and applications. Holt, Rinehart and Winston, Inc., U.S.A. (1965)

22. Engels, H.: Numerical quadrature and cubature. Academic Press, London(198o)

23. Graham, I.G.: The numerical solution of Fredholm integral equations of the second kind. Ph. D. Thesis, University of New South Wales, Australia(198o)

24. Graham, I.G.: Galerkin methods for second kind integral equations with singularities. Math. Comp. 39, 519-533 (1982)

25. Graham, I.G.; Sloan, I.H.: On the compactness of certain integral operators. J. Math. Anal. Appl. 68, 58o-594 (1979)

26. Graham, I.G.: Collocation methods for two dimensional weakly singular integral equations. J. Austral. Math. Soc. (Series B) 22, 456-473(1981)

27. Gröbner, W.; Hofreiter, N.: Integraltafeln, Teile I u. II. Springer, Wien/New York(1975) bzw. (1973)

28. Hämmerlin, G.: Ein Ersatzkernverfahren zur numerischen Behandlung von Integralgleichungen 2. Art. ZAMM 42, 439-463(1962)

29. de Hoog, F.; Weiss, R.: Asymptotic expansions for product integration. Math. Comp. 27, 295-3o6(1973)

3o. Jaswon, M.A.; Symm, G.T.: Integral equation methods in potential theory and elastostatics. Academic Press (1977)

31. Kussmaul, R.; Werner, P.: Fehlerabschätzungen für ein numerisches Verfahren zur Auflösung linearer Integralgleichungen mit schwachsingulären Kernen. Computing 3, 22-46(1968)

32. Michlin, S.G.; Prössdorf, S.: Singuläre Integraloperatoren. Akademie Verlag, Berlin(198o)

33. Noble, B.: A bibliography on: Methods for solving integral equations. Author and subject listing. Mathematics and Research Center, Madison, Wisconsin(1971)

34. Noble, B.: Some applications of the numerical solution of integral equations to boundary value problems. In: J. Ll. Morris, ed., Conference on applications of numerical analysis, Lecture Notes in Mathematics no. 228, Springer Verlag, Berlin(1971)

35. Noble, B.: The numerical solution of integral equations. In: The state of the art in numerical analysis. Ed.: D. Jacobs, Academic Press(1977)

36. Noble, B.: The numerical solution of linear Fredholm integral equations of the second kind by generalized quadrature. Tech. Summ. Rep. 898, Math. Res. Center, University of Wisconsin, Madison, Wisconsin.

37. Osborn, J.E.: Spectral approximation for compact operators. Math. Comp. vol. 29, no. 131, 712-725(1975)

38. Rice, J.R.: On the degree of convergence of nonlinear spline approximation. In: Approximations with special emphasis on spline functions, ed. by I.J. Schoenberg, Academic Press, New York, 349-365(1969)

39. Schäfer, E.: Gaussian quadrature applied to eigenvalue approximations. Oberwolfach-Tagung: "Numerische Integration"; Hrsg.: G. Hämmerlin, Birkhäuser ISNM 57, 187-197 (1982)

4o. Schäfer, E.: Fehlerabschätzungen für Eigenwertnäherungen nach der Ersatzkernmethode bei Integralgleichungen. Numer. Math. 32, 281-29o(1979)

41. Schäfer, E.: Spectral approximation for compact integral operators by degenerate kernel methods. Numer. Funct. Anal. Optimization 2, 43-63(198o)

42. Schneider, C.: Beiträge zur numerischen Behandlung schwachsingulärer Fredholmscher Integralgleichungen 2. Art. Dissertation, Johannes Gutenberg-Universität, Mainz(1977)

43. Schneider, C.: Product integration for weakly singular integral equations. Math. Comp. 36, 2o7-213(1981)

44. Schneider, C.: Produktintegration mit nicht-äquidistanten Stützstellen. Numer. Math. 35, 35-43(198o)

45. Sloan, I.A.: Improvement by iteration for compact operator equations. Math. Comp. 3o, 758-764(1976)

46. Sloan, I.A.: Error analysis for a class of degenerate-kernel methods. Numer. Math. 25, 231-238(1976)

47. Sloan, I.A.: A review of numerical methods for Fredholm integral equations of the second kind. In: The application and numerical solution of integral equations (eds.: R.S. Anderssen, F.R. de Hoog and M.A. Lukas) Alphen aan den Rijn, Sijthoff and Noordhoff(198o)

48. Sloan, I.A.; Burn, B.J.; Datyner, N.: A new approach to the numerical solution of integral equations. J. Comp. Phys. 18, 92-1o5(1975)

49. Sloan, I.A.; Noussair, E.; Burn, B.J.: Projection methods for equations of the second kind. J. Math. Anal. Appl. 69, 84-1o3(1979)

5o. Spence, A.: Error bounds and estimates for eigenvalues of integral equations. Numer. Math. 29, 133-147(1978)

51. Spence, A.; Thomas, K.: On superconvergence properties of Galerkins method for compact operator equations. IMA J. Numer. Anal. 3, 253-271(1983)

52. Spence, A.: Product integration for singular integrals and singular integral equations. Tagung Oberwolfach: "Numerische Integration"; ISNM vol. 45, 288-3oo(1979)

53. Stroud, A.H.: Approximate calculation of multiple integrals. Prentice Hall Series in Automatic Computation, Englewood Cliffs, New Jersey(1971)

54. Vainikko, G.; Pedas, A.: The properties of solutions of weakly singular integral equations. J. Austral. Math. Soc. (Series B) 22, 419-43o(1981)

55. Volk, W.: Die numerische Behandlung Fredholmscher Integralgleichungen zweiter Art mittels Splinefunktionen. Bericht Nr. 286 des Hahn-Meitner-Instituts für Kernforschung, Berlin(1979)

56. Walter, W.: Einführung in die Theorie der Distributionen. B.I.-Wissenschaftsverlag, Mannheim/Wien/Zürich(1974)

57. Wielandt, H. : Error bounds for eigenvalues of symmetric integral equations. Proc. Symp. Appl. Math. 6, 261-282 (1956)

LEBENSLAUF

Dieter Eschenbach	geboren am 2.1.1955 in Freiburg/Breisgau als Sohn der Eheleute Dr. med. Hans und Dr. med. Therese Eschenbach
Schulbildung	April 1962 - April 1966: Grundschule in Müllheim/Baden April 1966 - Juni 1974 : Gymnasium in Müllheim/Baden
Studium	November 1974 - Oktober 1979: Studium der Mathematik an der Ludwig-Maximilians-Universität München, Diplom in Mathematik
Berufstätigkeit	November 1979 - März 198o: Wissenschaftliche Hilfskraft am Mathematischen Institut der Universität München. April 198o - April 1984: Wissenschaftlicher Mitarbeiter im Fachbereich Luft- und Raumfahrttechnik der Hochschule der Bundeswehr München